

# 3

## Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

*Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit sind grundlegende Eigenschaften dynamischer Systeme, die die Lösbarkeit von Regelungsaufgaben entscheidend beeinflussen. Beide Eigenschaften werden in diesem Kapitel ausführlich behandelt. Wie eine graphentheoretische Analyse zeigt, werden sie hauptsächlich durch die Struktur des betrachteten Systems bestimmt.*

### 3.1 Steuerbarkeit

#### 3.1.1 Problemstellung und Definition der Steuerbarkeit

Bei der Lösung jeder Regelungsaufgabe steht die Frage, ob das gegebene System durch die Eingangsgröße  $u(t)$  in der gewünschten Weise beeinflusst werden kann. Was „gewünschte Weise“ heißt, kann in einzelnen Anwendungsfällen sehr unterschiedlich sein. Erfüllbar sind die meisten Güteforderungen jedoch nur dann, wenn das System durch eine entsprechende Wahl der Eingangsgröße  $u(t)$  im Zustandsraum von einem beliebigen Anfangszustand  $x_0$  in einen beliebigen Endzustand  $x_e$  gebracht werden kann. Ein System, bei dem dies gelingt, wird *vollständig steuerbar* genannt. Dieser Abschnitt ist einer eingehenden Analyse dieser wichtigen regelungstechnischen Eigenschaft gewidmet.

Zunächst muss die soeben skizzierte Eigenschaft noch etwas genauer beschrieben werden. Da sich der Systemzustand in Abhängigkeit vom Verlauf der Eingangsgröße über ein bestimmtes Zeitintervall ändert und da außerdem die genannte Zu-

standsüberführung in endlicher Zeit abgeschlossen sein soll, wird im Folgenden das Systemverhalten im Zeitintervall

$$0 \leq t \leq t_e \quad \text{bzw.} \quad t \in [0, t_e]$$

betrachtet und die dabei verwendete Eingangsgröße mit  $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$  bezeichnet. Mit dem Symbol  $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$  soll hervorgehoben werden, dass jetzt nicht der Wert des Eingangsvektors zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ , sondern der Verlauf im angegebenen Zeitintervall von Interesse ist.

Da im Folgenden die Wirkung der Eingangsgröße auf den Systemzustand betrachtet wird, ist nur die Zustandsgleichung

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

maßgebend. Das System kann deshalb auch durch die Angabe der beiden Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ , also entsprechend der bereits verwendeten Schreibweise durch  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  abgekürzt werden.

**Definition 3.1 (Steuerbarkeit)**

*Ein System  $\Sigma$  heißt vollständig steuerbar, wenn es in endlicher Zeit  $t_e$  von jedem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  durch eine geeignet gewählte Eingangsgröße  $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$  in einen beliebig vorgegebenen Endzustand  $\mathbf{x}(t_e)$  überführt werden kann.*

Man sagt dann auch, dass das Paar  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  vollständig steuerbar ist.

**Steuerbarkeit in den Nullzustand.** Um die Eigenschaft der vollständigen Steuerbarkeit zu prüfen, muss entsprechend der Definition die Zustandsüberführung zwischen beliebigen Zustandspaaren  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$  untersucht werden. Aus der Bewegungsgleichung (2.29), die hier für  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  und  $\mathbf{D} = \mathbf{O}$  verwendet wird, erhält man

$$\mathbf{x}_e = e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 + \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) \, d\tau$$

und nach Umstellung

$$\int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) \, d\tau = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a \quad (3.2)$$

mit

$$\mathbf{x}_a = e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0.$$

Da  $\mathbf{x}_0$  ein beliebiger Vektor sein kann und  $e^{\mathbf{A}t_e}$  eine reguläre Matrix ist, ist auch  $\mathbf{x}_a$  ein beliebiger  $n$ -dimensionaler Vektor. Das System ist also genau dann vollständig

steuerbar, wenn das Integral auf der linken Seite von Gl. (3.2) durch eine geeignete Wahl von  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  einen beliebig vorgegebenen Vektor  $\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b$  darstellt. Genau diese Forderung ist aber bereits dann zu erfüllen, wenn nicht jede beliebige Überführung von  $\mathbf{x}_0$  nach  $\mathbf{x}_e$ , sondern lediglich die Überführbarkeit des Systems von einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in den Nullzustand  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  untersucht wird, weil auch damit beliebige Vektoren

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{x}_e - \mathbf{x}_a = -e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0$$

dargestellt werden können. Die folgenden Betrachtungen können sich also ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf den Fall  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  beschränken.

Umgekehrt kann die Analyse des Systems auch auf die Frage beschränkt werden, ob das System vom Ruhezustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  in einen beliebigen Endzustand  $\mathbf{x}_e$  überführt werden kann. Wenn dies möglich ist, ist das System vollständig steuerbar.

**Steuerbarkeit und vollständige Steuerbarkeit.** In der Definition 3.1 wird nicht nur die Eigenschaft der Steuerbarkeit, sondern die der *vollständigen* Steuerbarkeit erklärt. Das Attribut „vollständig“ bezieht sich dabei auf die Tatsache, dass das System zwischen *beliebigen* Anfangs- und Endzuständen umgesteuert werden kann.

Wenn das System  $\Sigma$  nicht vollständig steuerbar ist, so erhebt sich die Frage, ob es dann wenigstens zwischen ausgewählten Zuständen  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_e$  umgesteuert werden kann. Auf diese Frage wird im Abschn. 3.1.5 ausführlich eingegangen. Es wird dort gezeigt, dass  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_e$  in einem Unterraum des Zustandsraumes liegen müssen.

Wenn es keine Verwechslungen geben kann, wird im Folgenden an Stelle von „vollständig steuerbar“ häufig nur von „steuerbar“ gesprochen.

**Steuerbarkeit und Erreichbarkeit.** In der Literatur wird häufig zwischen der Steuerbarkeit und der Erreichbarkeit unterschieden. Während man für die Steuerbarkeit fordert, dass das System von einem beliebigen Anfangszustand aus in den Nullzustand überführt werden kann, ist mit der Eigenschaft der Erreichbarkeit die Möglichkeit verbunden, das System vom Nullzustand in einen vorgegebenen Endzustand zu steuern. Beide Eigenschaften fallen bei den hier betrachteten linearen zeitinvarianten Systemen offenbar zusammen, denn in beiden Fällen muss das Integral in Gl. (3.2) einen beliebigen Vektor annehmen können.

Sobald aber das System zeitveränderlich oder gar nichtlinear ist, unterscheiden sich beide Eigenschaften.

### 3.1.2 Steuerbarkeitskriterium von KALMAN

Die vollständige Steuerbarkeit eines Systems  $\Sigma$  kann mit dem von KALMAN<sup>1</sup> vorgeschlagenen Kriterium geprüft werden. Dieses Kriterium bezieht sich auf die Steuerbarkeitsmatrix

<sup>1</sup> RUDOLF EMIL KALMAN (1930 – 2016), amerikanischer Mathematiker, leistete bedeutende Beiträge zur mathematischen Systemtheorie und entwickelte zusammen mit RICHARD BUCY das sogen. Kalmanfilter.

$$S_S = (B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B), \quad (3.3)$$

die eine  $(n \times n \cdot m)$ -Matrix ist. Wenn das System nur eine Eingangsgröße hat, ist die Matrix  $S_S$  quadratisch.

**Satz 3.1 (Steuerbarkeitskriterium von KALMAN)**

Das System  $\Sigma = (A, B)$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix  $S_S$  den Rang  $n$  hat:

$$\text{Rang } S_S = n. \quad (3.4)$$

**Beweis.** Im Folgenden wird dieses Kriterium bewiesen, wobei beim Nachweis der Notwendigkeit der angegebenen Bedingung offensichtlich wird, warum die Steuerbarkeit durch den Rang der angegebenen Matrix bestimmt wird. Anschließend wird eine Steuerung  $u_{[0, t_e]}$  angegeben, mit der das System von  $x_0$  nach  $x_e$  umgesteuert werden kann, womit gleichzeitig die Hinlänglichkeit des Kriteriums nachgewiesen wird.

**Notwendigkeit der Bedingung (3.4).** Damit das System  $\Sigma$  vollständig steuerbar ist, muss es eine Steuerung  $u_{[0, t_e]}$  geben, durch die das Integral in Gl. (3.2) einen beliebig vorgegebenen Vektor  $x_e - x_a$  darstellt. Gilt insbesondere  $x_e = 0$ , so muss der Eingangsvektor die Bedingung

$$\int_0^{t_e} e^{A(t_e - \tau)} B u(\tau) d\tau = -e^{A t_e} x_0$$

erfüllen. Diese Gleichung kann folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} -e^{A t_e} x_0 &= \int_0^{t_e} e^{A(t_e - \tau)} B u(\tau) d\tau = e^{A t_e} \int_0^{t_e} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau \\ -x_0 &= \int_0^{t_e} e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die weitere Umformung verwendet die Definitionsgleichung (I-5.10) für die Matrixexponentialfunktion. Man erhält

$$\begin{aligned} -x_0 &= B \int_0^{t_e} u(\tau) d\tau - AB \int_0^{t_e} \tau u(\tau) d\tau + A^2 B \int_0^{t_e} \frac{\tau^2}{2!} u(\tau) d\tau - \dots \\ &= B u_0 + AB u_1 + \dots + A^n B u_n + A^{n+1} B u_{n+1} + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit den Abkürzungen

$$u_i = (-1)^i \int_0^{t_e} \frac{\tau^i}{i!} u(\tau) d\tau, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Die Summe (3.5) stellt eine Linearkombination der Spalten von  $B$ ,  $AB$ ,  $A^2B$  usw. dar, deren Koeffizienten die Elemente der Vektoren  $u_i$  sind und die folglich durch die Funktion  $u_{[0,t_e]}$  bestimmt werden. Ein beliebiger Vektor  $x_0$  kann nur dann durch geeignete Wahl von  $u_{[0,t_e]}$  durch diese Summe erzeugt werden, wenn die Spalten der angegebenen Matrizen den  $n$ -dimensionalen Raum aufspannen. Mit anderen Worten, die aus den angegebenen Matrizen gebildete Matrix

$$(B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B \ A^nB \ A^{n+1}B \ \dots) \quad (3.6)$$

muss den Rang  $n$  besitzen.

Dass in die Steuerbarkeitsmatrix  $S_S$  nach Gl. (3.3) nur die ersten  $n$  Matrizen eingehen, ist durch das Cayley-Hamilton-Theorem (A2.43) begründet. Demnach können  $A^n$  und alle höheren Potenzen von  $A$  als Linearkombinationen der niedrigeren Potenzen dargestellt werden. Die Matrizen  $A^nB$ ,  $A^{n+1}B$  usw. liefern also keine von den Spalten der niedrigeren Potenzen  $A^iB$ , ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) linear unabhängigen Spalten. Damit ist erklärt, warum die Bedingung (3.4) notwendig für die vollständige Steuerbarkeit des Systems  $\Sigma = (A, B)$  ist.  $\square$

**Bestimmung von  $u_{[0,t_e]}$ .** Wenn die Bedingung (3.4) erfüllt ist, so kann man das System durch die Steuerung

Umsteuerung des Zustands von  $x(0) = x_0$  nach  $x(t_e) = x_e$

$$u_{[0,t_e]}(t) = -B^T e^{A^T(t_e-t)} W_S^{-1} (e^{At_e} x_0 - x_e), \quad 0 \leq t \leq t_e$$

(3.7)

mit

$$W_S = \int_0^{t_e} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt \quad (3.8)$$

von einem beliebigen Anfangszustand  $x_0$  in einen beliebigen Endzustand  $x_e$  überführen. Dass dies so ist, erkennt man sofort, wenn man die angegebene Steuerung in die Bewegungsgleichung einsetzt. Die Matrix  $W_S$  ist invertierbar, wenn die Steuerbarkeitsbedingung (3.4) erfüllt ist, womit auch die Hinlänglichkeit dieser Bedingung gezeigt ist.

**Steuerbarkeitsanalyse mit Hilfe der Gramschen Matrix.** Die in Gl. (3.8) definierte Matrix  $W_S$  heißt GRAMsche Matrix oder Gramsche Steuerbarkeitsmatrix. Man kann mit einer ähnlichen Argumentation wie bei Gl. (3.5) zeigen, dass diese Matrix für eine beliebige Endzeit  $t_e > 0$  genau dann positiv definit und folglich regulär ist, wenn das Kalmankriterium (3.4) erfüllt ist.

Für  $t_e = \infty$  kann die Matrix

$$W_{S\infty} = \int_0^{\infty} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt$$

aus der Gleichung

$$A W_{S\infty} + W_{S\infty} A^T = -B B^T \quad (3.9)$$

berechnet werden. Dies ist eine Ljapunowgleichung, die beim Optimalreglerentwurf eine große Rolle spielt und für die es deshalb gut entwickelte Lösungsalgorithmen gibt (vgl. Gl. (7.17) auf S. 302).

Wenn das System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  vollständig steuerbar ist, so kann man viele verschiedene Steuerungen  $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$  angeben, mit der die betrachtete Umsteuerungsaufgabe gelöst wird. Die angegebene Steuerung (3.7) ist eine besonders gute Lösung dieses Problems, denn sie bewirkt die Umsteuerung mit minimaler Energie

$$J(\mathbf{u}_{[0, t_e]}) = \int_0^{t_e} \mathbf{u}^T(t) \mathbf{u}(t) dt.$$

Deshalb weist diese Steuerung auf einige Aspekte der Steuerbarkeit linearer Systeme hin:

- Wenn ein System vollständig steuerbar ist, so kann die Umsteuerung von einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in einen beliebigen Endzustand  $\mathbf{x}_e$  in beliebig kurzer Zeit  $t_e$  vorgenommen werden.
- Je kleiner die zur Verfügung stehende Zeit  $t_e$  ist, umso größere Stellamplituden sind notwendig, denn umso kleiner sind die Elemente der Matrix  $\mathbf{W}_S$  und umso größer folglich die Elemente von  $\mathbf{W}_S^{-1}$ .

### Beispiel 3.1 Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Es soll untersucht werden, ob die gekoppelten Rührkessel aus Aufgabe I-5.5 vollständig steuerbar sind. Das Zustandsraummodell für die Regelstrecke lautet

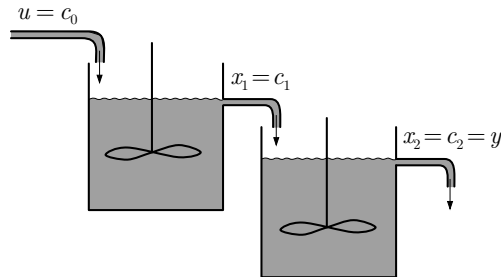


Abb. 3.1: Zwei gekoppelte Rührkessel

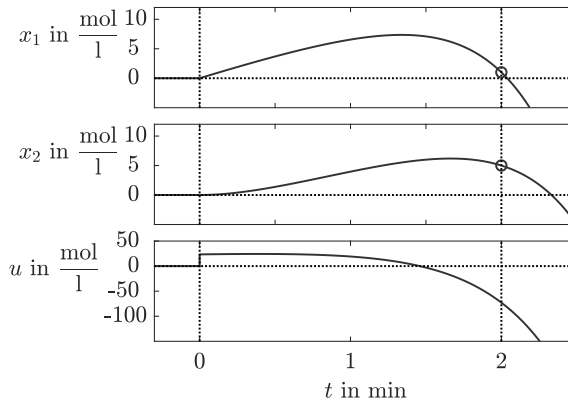
$$\text{Rührkessel : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & 0 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.10)$$

(vgl. S. I-639). Eingangsgröße ist die Konzentration  $c_0(t)$  des Stoffes  $A$  im Zulauf des ersten Reaktors. Die beiden Zustandsvariablen stellen die Konzentrationen des Stoffes  $A$  in den beiden Reaktoren dar (Abb. 3.1).  $F$  bezeichnet den konstanten Volumenstrom durch beide Reaktoren,  $V_1$  und  $V_2$  das Volumen der Reaktoren.

Die Steuerbarkeitsmatrix heißt

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & -\frac{F^2}{V_1^2} \\ 0 & \frac{F^2}{V_1 V_2} \end{pmatrix}.$$

Sie ist für beliebige positive Parameter  $F$ ,  $V_1$  und  $V_2$  regulär, d. h., die Rührkesselreaktoren sind vollständig steuerbar. Nur für  $F = 0$  ist die Steuerbarkeit nicht gewährleistet. Dies ist physikalisch dadurch begründet, dass in diesem Fall keine Flüssigkeit durch die Reaktoren fließt und sich die Konzentrationen folglich nicht verändern können.



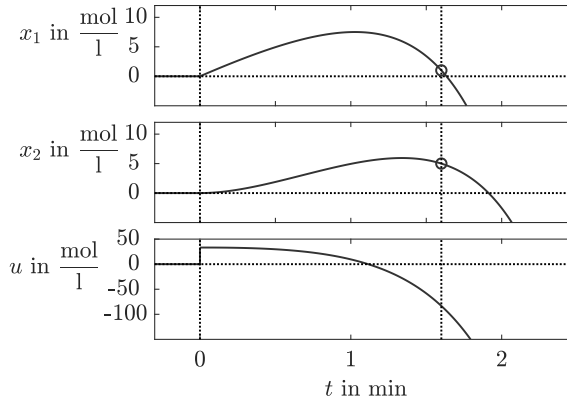
**Abb. 3.2:** Steuerung der Rührkesselreaktoren in den vorgegebenen Zustand

Für die Parameter  $F = 2 \frac{1}{\text{min}}$ ,  $V_1 = 6 \text{ l}$  und  $V_2 = 1 \text{ l}$  ist die Steuerung nach Gl. (3.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{[0,2]}(t) &= \begin{pmatrix} \frac{F}{V_1} & 0 \\ 0 & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} e^{\mathbf{A}^T(2-t)} \mathbf{W}_S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} -\frac{F}{V_1} & \frac{F}{V_2} \\ 0 & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix} \\ &= (0,333 \ 0) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} (2-t)} \begin{pmatrix} 47,47 & -53,23 \\ -53,23 & 72,05 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= (0,171 \ 0,198) e^{-\begin{pmatrix} -0,333 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} -218,7 \\ 307 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in Abb. 3.2 zusammen mit dem Konzentrationsverlauf in beiden Reaktoren für den Fall dargestellt, dass  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gilt und als Zielzustand  $\mathbf{x}_e = \mathbf{x}(2) = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \ 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}})^T$  vorgegeben ist. Alle Konzentrationen werden in  $\frac{\text{mol}}{\text{l}}$  gemessen. Erwartungsgemäß erreicht das System zur Zeit  $t = t_e = 2 \text{ min}$  den vorgegebenen Zustand  $\mathbf{x}_e$ . Das Beispiel zeigt jedoch

auch, dass der durch den vorgegebenen Endzustand festgelegte relativ große Konzentrationsunterschied zwischen  $x_1(2) = 1 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$  im linken Behälter und  $x_2(2) = 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$  im rechten Behälter nur mit einer sehr großen Stellgröße erreicht werden kann. Der Zufluss muss mit betragsmäßig großen Konzentrationen und mit großen Konzentrationsänderungen beaufschlagt werden.



**Abb. 3.3:** Steuerung der Rührkesselreaktoren in den vorgegebenen Zustand

Wenn ein System vollständig steuerbar ist, so kann es in beliebig kurzer Zeit in den gewünschten Endzustand überführt werden. Abbildung 3.3 zeigt, dass es möglich ist, den hier betrachteten Endzustand auch zur Zeit  $t_e = 1,6 \text{ min}$  zu erreichen. Allerdings vergrößert sich bei einer Verkürzung der Umsteuerzeit die Stellgröße.

**Diskussion.** Das Beispiel der Rührkesselreaktoren zeigt sehr anschaulich, was die Steuerbarkeit nach Definition 3.1 bedeutet und auch was sie nicht bedeutet. Wollte man vom Standpunkt praktischer Regelungsprobleme definieren, was Steuerbarkeit bedeutet, so würde man sicherlich von einem steuerbaren System fordern, dass es durch geeignete Wahl der Stellgröße in einen vorgeschriebenen Zustand geführt werden kann und dann dort verbleibt, so wie es in Regelungsaufgaben typischerweise gefordert ist. Die Eigenschaft der Steuerbarkeit nach Definition 3.1 gewährleistet, dass das System die erste Forderung erfüllt: Steuerbare Systeme können durch geeignete Wahl der Stellgrößen zwischen zwei beliebigen Punkten  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_e$  im Zustandsraum hin- und hergefahren werden.

Die zweite Forderung ist jedoch i. Allg. nicht erfüllt. Mit der Steuerbarkeit ist nicht die Möglichkeit verbunden, das System im vorgegebenen Endwert  $\mathbf{x}_e$  festzuhalten. In Abb. 3.2 ist zu sehen, dass das System den Zustand  $\mathbf{x}_e$  nicht beibehält. Auch wenn man die Steuerung  $u(t)$  für  $t > 2 \text{ min}$  anders festlegt als durch Gl. (3.7), verlässt das System den vorgegebenen Endzustand wieder. Um in den gekoppelten Rührkesselreaktoren ein Konzentrationsgefälle, wie es durch  $\mathbf{x}_e = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}})^T$  vorgeschrieben ist, über längere Zeit aufrechterhalten zu können, ist mehr als die eine Stellgröße notwendig, die hier zur Verfügung steht.

Diese Beobachtung gilt allgemein. Bei einem über eine Eingangsgröße  $u$  vollständig steuerbaren System reicht tatsächlich diese eine Stellgröße  $u$  aus, um das System in einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x}_e$  des  $n$ -dimensionalen Zustandsraumes zu überführen. Die Steuerbarkeit sichert jedoch nicht, dass das System dort durch geeignete Wahl von  $u$  gehalten werden kann. Um dies zu ermöglichen, sind  $n$  Stellgrößen notwendig.



Auf einen zweiten Aspekt soll am Beispiel der Rührkesselreaktoren hingewiesen werden. Die Möglichkeit, ein steuerbares System zwischen beliebigen Zuständen und in beliebig kurzer Zeit umzusteuern, ist durch die Linearität des Modells begründet. Sobald man die Stellgrößenbeschränkungen berücksichtigt, wird die Menge der erreichbaren Zustände eingeschränkt. So kann man bei den Rührkesselreaktoren keine negativen Konzentrationen einstellen. Da  $u$  andererseits Abweichungen von einem Arbeitspunkt  $\bar{u}$  beschreibt, ist für die Rührkesselreaktoren die angegebene Eingangsgröße nur dann realisierbar, wenn die Konzentration im Arbeitspunkt  $\bar{u}$  so hoch liegt, dass die negativen Werte von  $u$  immer noch positiven Konzentrationswerten im Zulauf entsprechen. Wird die Endzeit vergrößert und liegen die Konzentrationen im Endzustand nicht zu weit auseinander, so kann der gewünschte Endzustand auch mit wesentlich kleineren Stellamplituden erreicht werden. Die mit dem linearen Modell erhaltenen Aussagen sind dann auch unter Berücksichtigung der durch die Stellgrößenbeschränkungen entstehenden, jedoch nicht aktiven Nichtlinearitäten gültig.  $\square$

**Umsteuerung mit stückweise konstanter Stellgröße.** Die Definition der Steuerbarkeit bezieht sich auf die Existenz einer Funktion  $u_{[0,t_e]}$ , durch die das System vom Zustand  $x_0$  in einen vorgegebenen Endzustand  $x_e$  überführt wird, sagt aber nichts darüber aus, wie man eine solche Funktion finden kann. Mit Gl. (3.7) wurde zwar bereits eine derartige Funktion angegeben, aber diese Gleichung ist schwer interpretierbar und gibt keine intuitiv verständliche Antwort auf die Frage, wie der Stellgrößenverlauf für die gestellte Umsteuerungsaufgabe gewählt werden muss.

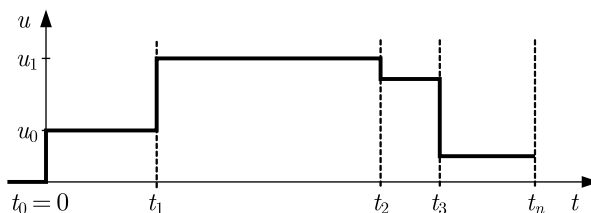
Die folgenden Untersuchungen sollen diese Frage beantworten. Für das System

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0$$

mit einer Eingangsgröße  $u(t)$  wird gezeigt, wie die Amplituden einer stückweise konstanten Stellgröße zu wählen sind, damit das System den Endzustand  $x(t_e) = x_e$  annimmt. Entsprechend Abb. 3.4 gelten für den hier betrachteten Stellgrößenverlauf die Beziehungen

$$u(t) = u_i \quad \text{für } t_i \leq t < t_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die Amplituden  $u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$  sind so zu bestimmen, dass sich das System zum Zeitpunkt  $t_e$  im gewünschten Endzustand befindet.



**Abb. 3.4:** Stückweise konstante Stellgröße

Für die stückweise konstante Stellgröße erhält man den Zustand zur Zeit  $t_e$  aus der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_e) = & e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{b} d\tau}_{\mathbf{p}_0} u_0 + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{b} d\tau}_{\mathbf{p}_1} u_1 \\ & + \dots + \underbrace{\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{\mathbf{A}(t_e - \tau)} \mathbf{b} d\tau}_{\mathbf{p}_{n-1}} u_{n-1}. \end{aligned}$$

Die Forderung  $\mathbf{x}(t_e) \stackrel{!}{=} \mathbf{x}_e$  führt damit auf die Beziehung

$$\mathbf{x}_e - e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{p}_i u_i = (\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_{n-1}) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Wenn die aus den Vektoren  $\mathbf{p}_i$  zusammengesetzte Matrix invertierbar ist, erhält man die gesuchten Amplituden der Stellgröße wie folgt:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \dots \ \mathbf{p}_{n-1})^{-1} (\mathbf{x}_e - e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0). \quad (3.12)$$

Mit einer ähnlichen Argumentation wie bei Gl. (3.5) kann man zeigen, dass es für alle Systeme  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , die das Kalmankriterium (3.4) erfüllen, möglich ist, Zeitpunkte  $t_i$ , ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) so festzulegen, dass die inverse Matrix existiert. Folglich gilt:

|| Wenn ein System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  vollständig steuerbar ist, so gibt es für jede Endzeit  $t_e$  und jeden Endzustand  $\mathbf{x}_e$  eine stückweise konstante Eingangsgröße, mit der das System in den Endzustand  $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{x}_e$  überführt wird.

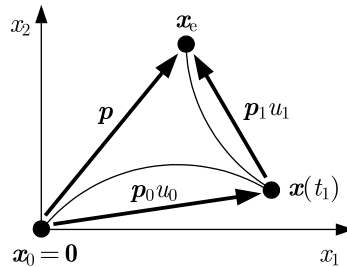
Gleichung (3.11) zeigt, wie der Stellgrößenverlauf zu wählen ist. Der auf der linken Seite stehende Vektor

$$\mathbf{p} = \mathbf{x}_e - e^{\mathbf{A}t_e} \mathbf{x}_0 \quad (3.13)$$

beschreibt die Differenz zwischen dem gewünschten Endzustand und dem Zustand, den das System aufgrund seiner Eigenbewegung zur Zeit  $t_e$  annimmt. Durch die Wahl der Stellgröße muss die erzwungene Bewegung zur Zeit  $t_e$  den Wert dieser Differenz annehmen, wobei der Vektor  $\mathbf{p}$  als Linearkombination der Vektoren  $\mathbf{p}_i$  darstellt wird. Damit dies für beliebige Zustände  $\mathbf{x}_0$  und  $\mathbf{x}_e$  möglich ist, müssen die

Vektoren  $\mathbf{p}_i$  den  $n$ -dimensionalen Raum aufspannen. Dies wird bei vollständig steuerbaren Systemen durch die Wahl der Umschaltzeitpunkte  $t_i$  der stückweise konstanten Eingangsgröße gesichert. Die Stellamplituden  $u_i$  sind dann gerade die Faktoren in der auf der rechten Seite von Gl. (3.11) stehenden Linearkombination.

Die Wahl der Stellgröße dient also dem Ziel, das System in  $n$  Zeitintervallen  $[t_i, t_{i+1}]$ , ( $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ) entlang der Vektoren  $\mathbf{p}_i$  so zu bewegen, dass die gesamte Bewegung zum Zeitpunkt  $t_e$  gerade dem Vektor  $\mathbf{p}$  entspricht. Dabei geben die Amplituden  $u_i$  der Stellgröße die „Länge“ der Bewegung an.



**Abb. 3.5:** Überführung eines Systems zweiter Ordnung in den Endzustand  $\mathbf{x}_e$ .

Abbildung 3.5 zeigt diesen Sachverhalt für ein System zweiter Ordnung mit  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . Die durchgezogene Linie stellt die Bewegung des Systems im Zustandsraum dar. Zur Zeit  $t_1$  befindet sich das System im Zustand  $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{p}_0 u_0$ . Um vom Anfangszustand zum Endzustand  $\mathbf{x}_e$  zu kommen, wird das System entlang der beiden Vektoren  $\mathbf{p}_0$  und  $\mathbf{p}_1$  bewegt. Wenn diese beiden Vektoren linear unabhängig sind, kann durch eine geeignete Wahl von  $u_0$  und  $u_1$  ein beliebiger Punkt im zwei-dimensionalen Zustandsraum angesteuert werden.

### Beispiel 3.1 (Forts.) Steuerbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Für die gekoppelten Rührkesselreaktoren wird wie bisher mit  $t_e = 1,6$  min sowie mit der willkürlich gewählten Zeit  $t_1 = 1$  min gearbeitet. Durch eine geeignete Festlegung von  $u_0$  und  $u_1$  soll das System aus dem Nullzustand in den Zustand  $\mathbf{x}_e = (1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad 5 \frac{\text{mol}}{\text{l}})^T$  gesteuert werden.

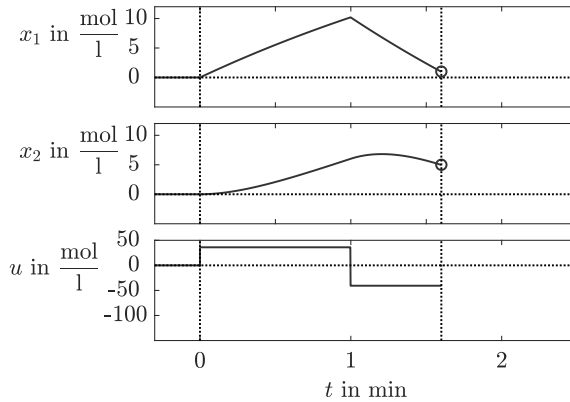
Mit den angegebenen Parametern erhält man die Vektoren

$$\mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 0,232 \\ 0,226 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0,181 \\ 0,078 \end{pmatrix},$$

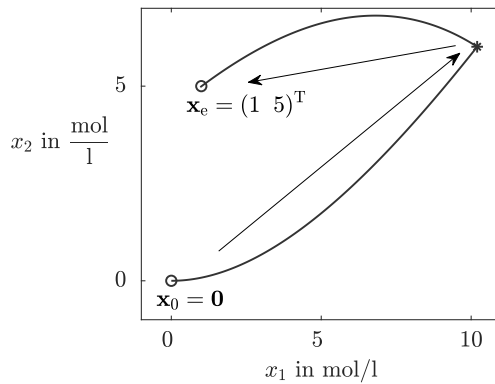
die linear unabhängig sind. Folglich kann jeder beliebige Endzustand durch eine geeignete Wahl von  $u_0$  und  $u_1$  erzeugt werden. Für den hier betrachteten Zustand  $\mathbf{x}_e$  erhält man aus Gl. (3.11) die Werte

$$u_0 = 36,03 \quad \text{und} \quad u_1 = -40,62.$$

Das Verhalten der Reaktoren unter dem Einfluss dieser Steuerung ist in Abb. 3.6 dargestellt.



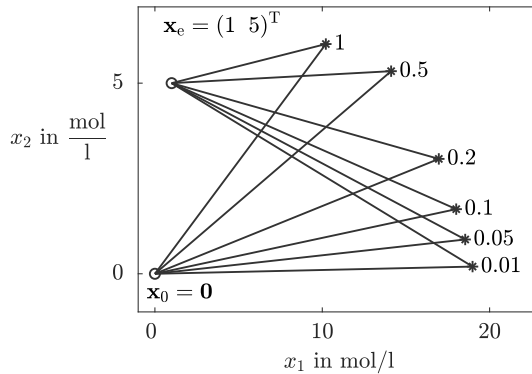
**Abb. 3.6:** Umsteuerung der Rührkesselreaktoren mit stückweise konstanter Eingangsgröße



**Abb. 3.7:** Darstellung der Umsteuerung im Zustandsraum

Abbildung 3.7 zeigt, wie sich das System mit der stückweise konstanten Stellgröße bewegt. Die angegebenen Pfeile entsprechen den Vektoren  $\mathbf{p}_0 u_0$  und  $\mathbf{p}_1 u_1$  aus Abb. 3.5.

Während der Vektor  $\mathbf{p}$  aus Gl. (3.13) nur von der gewählten Endzeit  $t_e$  abhängt und für das hier behandelte Beispiel wegen des verschwindenden Anfangszustands mit dem Endzustand übereinstimmt ( $\mathbf{p} = \mathbf{x}_e$ ), beeinflusst die Wahl des Zeitpunktes  $t_1$  die Vektoren  $\mathbf{p}_0$  und  $\mathbf{p}_1$ . Diese Vektoren sind für unterschiedliche Werte von  $t_1$  in Abb. 3.8 dargestellt, wobei die Linien vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  zu dem durch einen Stern gekennzeichneten Zustand  $\mathbf{x}(t_1)$  die Vektoren  $\mathbf{p}_0 u_0$  und die Linien vom Stern zum Endzustand  $\mathbf{x}_e$  die Vektoren  $\mathbf{p}_1 u_1$  repräsentieren. Die über den mit  $t_1 = 1$  min gekennzeichneten Stern führenden Linien entsprechen den Pfeilen aus Abb. 3.7. Offensichtlich sind alle hier gezeigten Vektorpaare linear unabhängig. Das heißt, dass die Umsteuerung für alle hier betrachteten Zeiten  $t_1$  mit einer stückweise konstanten Eingangsgröße möglich ist.  $\square$



**Abb. 3.8:** Umsteuerung bei unterschiedlicher Wahl des Zeitpunktes  $t_1$  (in Minuten)

**Anwendung des Kalmankriteriums.** Die Steuerbarkeitsbedingung (3.4) kann bei Systemen  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$  mit einem Eingang durch die Berechnung der Determinante überprüft werden, wobei

$$\det \mathbf{S}_S \neq 0$$

gelten muss. Für Systeme  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  mit mehreren Eingängen ist die Rangbestimmung nicht ganz so einfach. Man kann hier ausnutzen, dass der Rang einer rechteckigen Matrix  $\mathbf{S}$  gleich der Anzahl der von null verschiedenen Singulärwerte  $\sigma_i(\mathbf{S})$  ist (vgl. Gl. (A2.56)). Damit die Matrix  $\mathbf{S}_S$  den Rang  $n$  hat, muss also die  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{S}_S \mathbf{S}_S^T$  vollen Rang haben, was auf die Bedingung

$$\det \mathbf{S}_S \mathbf{S}_S^T \neq 0$$

führt.

**Steuerbarkeitsindizes.** Das Kalmankriterium fordert, dass es in der Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_S$   $n$  linear unabhängige Spalten gibt. Für Systeme mit einem Eingang werden diese Spalten durch  $\mathbf{b}$  und die Produkte  $\mathbf{A}\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{A}^2\mathbf{b}$ , ...,  $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$  gebildet. Bei Mehrgrößensystemen braucht man außer der Matrix  $\mathbf{B}$  u. U. gar nicht alle Produkte  $\mathbf{A}\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$ , ...,  $\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}$ , um diese  $n$  linear unabhängigen Spalten zu finden. Es reicht möglicherweise, wenn in die Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_S$  nur  $\nu$  Teilmatrizen geschrieben werden, das Kalmankriterium also bereits in der Form

$$\mathbf{S}_S(\nu) = (\mathbf{B} \ \mathbf{A}\mathbf{B} \ \dots \ \mathbf{A}^{\nu-1}\mathbf{B})$$

erfüllt wird. Die kleinste Zahl  $\nu$ , für die

$$\text{Rang } \mathbf{S}_S(\nu) = n$$

gilt, wird als *Steuerbarkeitsindex* bezeichnet.

Man kann diese Untersuchungen noch etwas verfeinern, indem man den Beitrag betrachtet, den die einzelnen Spalten  $\mathbf{b}_i$  der Matrix  $\mathbf{B}$  zum Rang der Steuerbarkeitsmatrix leisten. Dafür kann man zunächst die Spalten der Steuerbarkeitsmatrix  $\tilde{\mathbf{S}}_S$  so umordnen, dass zuerst alle mit  $\mathbf{b}_1$  gebildeten Spalten stehen, dahinter die mit  $\mathbf{b}_2$  gebildeten usw.

$$\tilde{\mathbf{S}}_S = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_m \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_m).$$

Diese Umformung ändert nichts am Rang der Matrix, so dass das Kalmankriterium auch auf die neu entstandene Matrix angewendet werden kann.

Ist der Rang der Matrix  $\tilde{\mathbf{S}}_S$  gleich  $n$ , so gibt es eine Menge von  $n$  linear unabhängigen Spalten dieser Matrix. Man kann diese Spalten auf unterschiedliche Weise auswählen. Wie viele Spalten davon zum Eingang  $u_i$  gehören, hängt davon ab, wie viele der Produkte  $\mathbf{A}^j \mathbf{b}_i$ , ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) untereinander linear unabhängig sind. Die Anzahl dieser linear unabhängigen Spalten wird als KRONECKER-Index  $\nu_i$  des  $i$ -ten Eingangs bezeichnet.  $\nu_i$  ist also die kleinste Zahl, für die der Vektor  $\mathbf{A}^{\nu_i} \mathbf{b}_i$  von den Vektoren  $\mathbf{b}_i, \mathbf{A}\mathbf{b}_i, \mathbf{A}^2\mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{A}^{\nu_i-1}\mathbf{b}_i$  linear abhängig ist, während diese  $\nu_i$  Vektoren untereinander linear unabhängig sind.

Man kann nun insgesamt  $n$  linear unabhängige Spalten der Matrix  $\tilde{\mathbf{S}}_S$  auf folgende Weise auswählen. Zuerst wählt man  $r_1 + 1$  unabhängige Spalten, die zum Eingang 1 gehören ( $r_1 \leq \nu_1$ ). Dann verwendet man  $\mathbf{b}_2$  sowie weitere zum Eingang 2 gehörenden Spalten, solange diese von den bereits ausgewählten Spalten linear unabhängig sind. Wenn noch weitere Spalten notwendig sind, so verwendet man nun die zum Eingang 3 gehörigen usw. Die entstehende Matrix hat die Form

$$\hat{\mathbf{S}}_S = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_1}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_2}\mathbf{b}_2 \quad \dots \quad \mathbf{b}_m \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_m \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r_m}\mathbf{b}_m),$$

wobei gilt

$$\sum_{i=1}^m r_i = n$$

und

$$\text{Rang } \hat{\mathbf{S}}_S = n.$$

Es gibt i. Allg. mehrere Matrizen  $\hat{\mathbf{S}}_S$ , die die angegebene Rangbedingung erfüllen, denn je nachdem, wie man die Eingänge nummeriert, verändert sich die Anzahl  $r_i$  der vom  $i$ -ten Eingang verwendeten Spalten.

### 3.1.3 Steuerbarkeit der kanonischen Normalform

Die Steuerbarkeit wird im Folgenden mit Hilfe der kanonischen Normalform des Zustandsraummodells in Bezug zu den einzelnen Eigenvorgängen des Systems gesetzt. Unter der Voraussetzung, dass die Matrix  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar ist, kann das Modell (3.1) bekanntlich mit Hilfe der Transformation

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}(t) \tag{3.14}$$

in die Form (2.5)

$$\Sigma : \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \quad \tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}_0 \quad (3.15)$$

mit  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{B}$  überführt werden.

Da sich die kanonischen Zustandsvariablen nicht gegenseitig beeinflussen, kann man die Betrachtungen zunächst auf die  $i$ -te Zeile der Gl. (3.15) beschränken

$$\dot{\tilde{x}}_i(t) = \lambda_i \tilde{x}_i(t) + \tilde{\mathbf{b}}_i^T \mathbf{u}(t), \quad \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_{i0},$$

wobei  $\tilde{\mathbf{b}}_i^T$  die  $i$ -te Zeile der Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}$  ist. Wenn  $\tilde{\mathbf{b}}_i^T$  eine Nullzeile ist, bewegt sich die  $i$ -te Zustandsvariable entsprechend der Beziehung

$$\tilde{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \tilde{x}_i(0)$$

unabhängig von der Eingangsgröße und es kann *kein* beliebiger Endzustand  $\tilde{\mathbf{x}}(t_e)$  angesteuert werden. Das System ist nicht vollständig steuerbar.

Der Umkehrschluss, dass das System  $\Sigma = (\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{B}})$  vollständig steuerbar ist, wenn  $\tilde{\mathbf{B}}$  keine Nullzeile besitzt, gilt nur unter einer zusätzlichen Voraussetzung an die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$ , die zunächst für Systeme mit einem Eingang hergeleitet wird.

**Systeme mit einem Eingang.** Die Steuerbarkeitsmatrix des Paares  $(\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{b}})$  heißt

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_S &= \left( \tilde{\mathbf{b}} \text{diag } \lambda_i \tilde{\mathbf{b}} \text{diag } \lambda_i^2 \tilde{\mathbf{b}} \dots \text{diag } \lambda_i^{n-1} \tilde{\mathbf{b}} \right) \\ &= \text{diag } \tilde{b}_i \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{b}_i$  die Elemente des Vektors  $\tilde{\mathbf{b}}$  sind und  $\text{diag } \tilde{b}_i$  eine Diagonalmatrix mit den Hauptdiagonalelementen  $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_n$  bezeichnet. Das Produkt dieser beiden Matrizen ist regulär, wenn außer  $\tilde{b}_i \neq 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) auch noch

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \quad i \neq j \quad (3.16)$$

gilt, denn die zweite Matrix ist eine vandermondesche Matrix, deren Determinante sich entsprechend der Beziehung (A2.67) berechnet:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Das heißt, das System  $\Sigma = (\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{b}})$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn  $\tilde{\mathbf{b}}$  kein Nullelement enthält und wenn alle Eigenwerte einfach sind.

Die Bedingung (3.16) kann man folgendermaßen interpretieren. Es wird angenommen, dass die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  entgegen der Bedingung (3.16) gleich sind ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ). Wenn die Matrix  $\mathbf{A}$ , wie vorausgesetzt wurde, diagonalisierbar ist, so gibt es zu diesen Eigenwerten zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$ . Für diese Eigenvektoren gelte  $\mathbf{v}_1^T \mathbf{b} = \tilde{b}_1 \neq 0$  und  $\mathbf{v}_2^T \mathbf{b} = \tilde{b}_2 \neq 0$ , denn ansonsten wäre das System ohnehin nicht vollständig steuerbar. Die zugehörigen kanonischen Zustandsvariablen genügen den beiden Zeilen

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t) &= \lambda \tilde{x}_1(t) + \tilde{b}_1 u(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) &= \lambda \tilde{x}_2(t) + \tilde{b}_2 u(t)\end{aligned}$$

aus Gl. (3.15). Wenn sich das System zur Zeit  $t = 0$  in der Ruhelage befindet, gilt für eine beliebige Steuerung  $u(t)$  zwischen den beiden Zustandsvariablen die Beziehung

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_2} \tilde{x}_2(t). \quad (3.17)$$

Das System kann also nur in keinen Endzustände  $\tilde{\mathbf{x}}_e$  gesteuert werden, für die diese Beziehung gilt. Es ist nicht vollständig steuerbar.

Aus dieser Betrachtung erhält man die folgenden Regeln bezüglich der Steuerbarkeit von Systemen  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$  mit einer Eingangsgröße, die für einfache Anwendungen sehr nützlich sind:

- Wenn die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar ist und mindestens einen mehrfachen Eigenwert besitzt, so ist das System mit einer Eingangsgröße nicht vollständig steuerbar.
- Wenn die Systemmatrix  $\mathbf{A}$  diagonalisierbar ist und das System mit einer Eingangsgröße vollständig steuerbar ist, so hat es keine mehrfachen Eigenwerte.

Man sollte jedoch beachten, dass bei einer nicht diagonalähnlichen Systemmatrix mehrfache Eigenwerte auftreten können, ohne dass dadurch sofort auf die Steuerbarkeitseigenschaften geschlossen werden kann.

**Systeme mit  $m$  Eingängen.** Um die Steuerbarkeit eines Systems  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  mit mehrfachen Eigenwerten und diagonalähnlicher Systemmatrix zu sichern, müssen die einzelnen Eingangsvariablen in unterschiedlicher Weise in die Zustandsgleichungen derjenigen kanonischen Zustandsvariablen eingehen, die zu denselben Eigenwerten gehören. Wenn

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q = \lambda$$

gilt, so sind die  $q$  Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}_1(t) &= \lambda \tilde{x}_1(t) + \tilde{\mathbf{b}}_1^T \mathbf{u}(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) &= \lambda \tilde{x}_2(t) + \tilde{\mathbf{b}}_2^T \mathbf{u}(t)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \vdots \\ \dot{\tilde{x}}_q(t) &= \lambda \tilde{x}_q(t) + \tilde{\mathbf{b}}_q^T \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

für die Steuerbarkeitsanalyse von Bedeutung. Das System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist vollständig steuerbar, wenn die  $q$  Zeilenvektoren

$$\tilde{\mathbf{b}}_i^T = \mathbf{v}_i^T \mathbf{B}$$

untereinander linear unabhängig sind. Da  $\tilde{\mathbf{b}}_i^T$  ein  $m$ -dimensionaler Zeilenvektor ist, folgt als notwendige Steuerbarkeitsbedingung daraus, dass die Eigenwerte eines Systems mit  $m$  Eingangsgrößen und diagonalähnlicher Systemmatrix höchstens  $m$ -fach auftreten können.

Diese Untersuchungen sind in dem folgenden Steuerbarkeitskriterium zusammengefasst.

**Satz 3.2 (Steuerbarkeitskriterium von GILBERT)**

*Das System  $\Sigma = (\text{diag } \lambda_i, \tilde{\mathbf{B}})$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}$  keine Nullzeile besitzt und wenn bei jedem  $q$ -fachen Eigenwert die zugehörigen  $q$  Zeilen  $\tilde{\mathbf{b}}_i^T$  der Matrix  $\tilde{\mathbf{B}}$  linear unabhängig sind.*

**Steuerbarkeit der Eigenvorgänge.** Die Steuerbarkeit ist in Definition 3.1 als eine Eigenschaft des gesamten Systems  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  definiert worden, so dass man bei der Steuerbarkeitsanalyse nur zu entscheiden hat, ob das System als Ganzes vollständig steuerbar ist oder nicht. Die mit dem Zustandsraummodell in kanonischer Normalform durchgeführten Untersuchungen haben nun aber gezeigt, dass die vollständige Steuerbarkeit bedeutet, dass alle kanonischen Zustandsvariablen unabhängig voneinander durch die Eingangsgrößen beeinflusst werden können. Wenn das System nicht vollständig steuerbar ist, so liegt dies daran, dass eine oder mehrere kanonische Zustandsvariablen nicht oder nicht unabhängig voneinander beeinflusst werden können.

Aus diesem Grunde bezieht man häufig die Steuerbarkeit auf die Eigenvorgänge  $e^{\lambda_i t}$  bzw. sogar auf die Eigenwerte  $\lambda_i$  der Matrix  $\mathbf{A}$  und bezeichnet den Eigenvorgang bzw. den Eigenwert als steuerbar oder nicht steuerbar. Sind alle Eigenvorgänge bzw. Eigenwerte steuerbar, so ist das System vollständig steuerbar entsprechend Definition 3.1. Ist das System nicht vollständig steuerbar, so gibt es mindestens einen Eigenvorgang bzw. Eigenwert, der nicht steuerbar ist.

Diese Sprachregelung ist zwar für Systeme mit mehrfachen Eigenwerten problematisch, weil es Systeme geben kann, bei denen ein „Exemplar“ eines mehrfachen Eigenwertes steuerbar ist, während ein anderes nicht steuerbar ist. Für die hier behandelten Anwendungen spielen diese Schwierigkeiten jedoch keine Rolle.

Vorteilhaft ist der Bezug der Steuerbarkeitseigenschaft zu den Eigenwerten vor allem bei nicht vollständig steuerbaren Systemen. Man kann dann überprüfen, wel-

che Ursachen das Fehlen der vollständigen Steuerbarkeit hat und welche Auswirkungen auf das Regelkreisverhalten daraus abgeleitet werden können. Gegebenenfalls weiß man auch, wie man die fehlende Steuerbarkeit durch Veränderung der Eingriffsmöglichkeiten in das System beheben kann.

Man sollte jedoch darauf achten, dass die Steuerbarkeitseigenschaft den Eigenvorgängen und Eigenwerten zugeordnet ist und man nur bei der kanonischen Normalform auch von der Steuerbarkeit einzelner Zustandsvariabler  $\tilde{x}_i$  sprechen kann.

<b>Aufgabe 3.1</b> Steuerbarkeit von Systemen mit mehrfachen Eigenwerten
--

Betrachten Sie ein System mit  $m$  Eingängen, das einen  $p$ -fachen Eigenwert  $\lambda$  besitzt. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen richtig sind:

- Das System kann nur dann vollständig steuerbar sein und gleichzeitig eine diagonalähnliche Systemmatrix  $A$  besitzen, wenn die Vielfachheit  $p$  des Eigenwertes die Anzahl der Eingänge nicht übersteigt ( $p \leq m$ ).
- Wenn die Vielfachheit des Eigenwertes die Anzahl der Eingänge übersteigt ( $p > m$ ), so ist das System entweder nicht vollständig steuerbar oder es hat keine diagonalähnliche Systemmatrix.

Untersuchen Sie anhand dieser Aussagen die Steuerbarkeit der Reihenschaltung und der Parallelschaltung zweier PT<sub>1</sub>-Glieder mit gleichen Zeitkonstanten. □

### 3.1.4 Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS

In diesem Abschnitt wird das von HAUTUS vorgeschlagene Steuerbarkeitskriterium abgeleitet. Es ermöglicht nicht nur den Test, *ob* das System vollständig steuerbar ist, sondern es gibt gegebenenfalls auch an, welche Eigenwerte nicht steuerbar sind. Das Kriterium ist äquivalent dem Kalmankriterium, wie folgende Überlegung zeigt.

Wenn das System  $\Sigma = (A, B)$  nicht vollständig steuerbar ist, so sind die  $n$  Zeilen der Steuerbarkeitsmatrix  $S_S$  linear abhängig und es gibt einen  $n$ -dimensionalen Zeilenvektor  $q^T$ , für den das Produkt

$$q^T S_S = q^T (B \ AB \ \dots \ A^{n-1} B) = \mathbf{0}^T$$

einen  $n \cdot m$ -dimensionalen Nullvektor darstellt. Dabei gilt insbesondere

$$q^T B = \mathbf{0}^T, \tag{3.18}$$

wobei  $\mathbf{0}^T$  ein  $m$ -dimensionaler Nullvektor ist. Da die ersten  $n$  Potenzen von  $A$  linear unabhängig sind, stellen die Produkte  $q^T A^i$  linear unabhängige Zeilenvektoren dar. Damit das Produkt  $q^T S_S$  verschwindet, muss  $q^T$  ein Linkseigenvektor von  $A$  sein:

$$q^T A = \lambda q^T.$$

$\lambda$  stellt dabei einen beliebigen Eigenwert von  $A$  dar.

Damit das System vollständig steuerbar ist und deshalb die angegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind, darf also für keinen Eigenvektor von  $\mathbf{A}$  die Beziehung (3.18) gelten. Dieser Sachverhalt wird im Steuerbarkeitskriterium von Hautus gefordert: Das System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung

$$\text{Rang}(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{B}) = n \quad (3.19)$$

für alle komplexen Werte  $\lambda$  erfüllt ist. In der zum Test herangezogenen Matrix stehen die Matrizen  $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  nebeneinander, so dass es sich hierbei um eine  $(n \times n + m)$ -Matrix handelt.

Man kann dieses Kriterium vereinfachen, weil die Rangbedingung (3.19) für alle Werte von  $\lambda$ , die nicht mit Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  übereinstimmen, erfüllt ist, denn für diese  $\lambda$  hat bereits die links stehende Matrix  $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$  den geforderten Rang  $n$ . Die angegebene Bedingung muss deshalb nur für die  $n$  Eigenwerte  $\lambda_i \{\mathbf{A}\}$  geprüft werden.

**Satz 3.3 (Steuerbarkeitskriterium von HAUTUS)**

*Das System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  ist genau dann vollständig steuerbar, wenn die Bedingung*

$$\text{Rang}(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A} \ \mathbf{B}) = n \quad (3.20)$$

*für alle Eigenwerte  $\lambda_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) der Matrix  $\mathbf{A}$  erfüllt ist.*

Vergleicht man das Kalmankriterium mit dem Hautuskriterium, so wird offensichtlich, dass bei Anwendung der Bedingung (3.4) der Rang einer  $(n \times n \cdot m)$ -Matrix bestimmt werden muss, während die Bedingung (3.20) die Überprüfung des Ranges von  $n$  Matrizen der Dimension  $(n \times n + m)$  erfordert, wobei zuvor die Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  zu bestimmen sind. Trotz dieses vergleichsweise großen Aufwandes, den das Hautuskriterium mit sich bringt, ist dieses Kriterium aus zwei Gründen häufig das zweckmäßigere. Erstens kann man das Hautuskriterium meist auch dann anwenden, wenn die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  Parametersymbole enthalten, die Elemente dieser Matrizen also nicht zahlenmäßig, sondern bezüglich ihrer Abhängigkeit von bestimmten Systemparametern vorgegeben sind. Zweitens weist das Hautuskriterium darauf hin, welche Eigenwerte gegebenenfalls nicht steuerbar sind.

Das Hautuskriterium zeigt außerdem, dass die nicht steuerbaren Eigenwerte auch Eingangsentkopplungsnullstellen des Systems sind. Beide Bezeichnungen können synonym verwendet werden. Sie wurden getrennt voneinander eingeführt, wobei die Entkopplungsnullstellen im Abschn. 2.5.3 als diejenigen Frequenzen definiert wurden, die die Rangbedingung (2.62) auf S. 52 erfüllen. Die Beziehung (2.62) hat keine direkte systemtheoretische Interpretation. Diese Interpretation wird jetzt nachgeliefert: Die Eingangsentkopplungsnullstellen sind diejenigen Frequenzen  $\lambda_i$ , deren zugehörige Eigenvorgänge  $e^{\lambda_i t}$  nicht durch den Eingang  $\mathbf{u}(t)$  beeinflusst werden können. Die nicht steuerbaren Eigenwerte  $\lambda_i$  kommen deshalb nicht als Pole in der Übertragungsfunktionsmatrix  $\mathbf{G}(s)$  des betrachteten Systems vor.

### 3.1.5 Nicht vollständig steuerbare Systeme

Welche Gründe kann es geben, dass ein System nicht vollständig steuerbar ist? Drei wichtige Beispiele sollen im Folgenden diskutiert werden, um diese Frage zu beantworten.

|| Eigenvorgänge, die nicht mit dem Eingang verbunden sind, sind nicht steuerbar.

Dieser Fall wurde anhand des Zustandsraummodells in kanonischer Normalform schon verdeutlicht. Wenn die  $i$ -te Zeile  $\tilde{b}_i$  der Matrix  $\tilde{B}$  eine Nullzeile ist, so wirkt der Eingang  $u$  nicht auf die Bewegung der Zustandsvariablen  $\tilde{x}_i$ .

|| Zwei parallele Teilsysteme mit denselben dynamischen Eigenschaften sind nicht vollständig steuerbar.

#### Beispiel 3.2 Nicht steuerbare Eigenvorgänge in einer Parallelschaltung

Ein Beispiel ist in Abb. 3.9 angegeben. Zwei PT<sub>1</sub>-Glieder mit den Zustandsvariablen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  und denselben Zeitkonstanten  $T = -\frac{1}{\lambda}$  führen auf das Zustandsraummodell

$$\text{Parallelschaltung : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (3.21)$$

für das die im Satz 3.2 angegebene Bedingung nicht gilt, denn die Elemente  $b_1$  und  $b_2$  können nicht gleichzeitig von null verschieden und linear unabhängig sein. Das System ist nicht vollständig steuerbar.

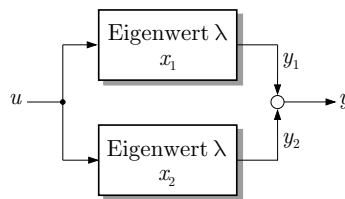


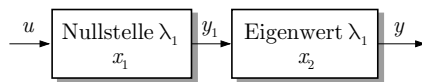
Abb. 3.9: Nicht vollständig steuerbare Parallelschaltung

Der Grund liegt in der Tatsache, dass beide Teilsysteme für sich genommen durch die Steuerung in beliebige Zustände gebracht werden können, es jedoch nicht möglich ist, beide Teilsysteme mit derselben Eingangsgröße in unabhängig voneinander vorgegebene Endwerte  $x_1(t_e)$  und  $x_2(t_e)$  zu steuern (vgl. Gl. (3.17)). Da sich beide Teilsysteme in gleicher Geschwindigkeit bewegen, kann das eine Teilsystem beispielsweise nicht aus der Ruhelage

in einen Zustand mit negativem Vorzeichen gebracht werden, während der andere Zustand positive Werte annimmt.

Diese Tatsache lässt sich auf die Parallelschaltung von Teilsystemen höherer Ordnung mit identischen dynamischen Eigenschaften verallgemeinern, wie in Aufgabe 3.6 nachgewiesen werden soll.  $\square$

Lassen sich in der Übertragungsfunktion eines Eingrößensystems ein oder mehrere Pole gegen Nullstellen kürzen, so kann man die mit den Polen verbundenen Eigenvorgänge nicht steuern (oder, wie später gezeigt wird, nicht beobachten).



**Abb. 3.10:** Nicht vollständig steuerbare Reihenschaltung

### Beispiel 3.3 Nicht vollständig steuerbare Reihenschaltung

Das Zustandsraummodell der Reihenschaltung des Systems

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\lambda_1 + 1)x_1(t) + u(t) \\ y_1(t) = x_1(t) + u(t) \end{cases}$$

mit dem System

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_2(t) = \lambda_1 x_2(t) + y_1(t) \\ y(t) = x_2(t), \end{cases}$$

lautet

$$\text{Reihenschaltung : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

(Abb. 3.10). Aus der Steuerbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_S = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 + 1 \\ 1 & \lambda_1 + 1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass die Reihenschaltung nicht vollständig steuerbar ist. Mit dem Hautuskriterium kann man nachprüfen, dass  $\lambda_1$  der nicht steuerbare Eigenwert ist, denn es gilt

$$\text{Rang} \left( \lambda_1 \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \lambda_1 + 1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$$

Demgegenüber ist der Eigenwert  $\lambda_1 + 1$  steuerbar.

Der Grund für die Nichtsteuerbarkeit des Eigenwertes  $\lambda_1$  liegt darin, dass das erste Teilsystem der Reihenschaltung eine Nullstelle bei  $\lambda_1$  besitzt, die gleichzeitig eine Entkopplungsnulstelle der Reihenschaltung ist. In der Übertragungsfunktion der Reihenschaltung treten weder die Entkopplungsnulstelle noch der Eigenwert  $\lambda_1$  auf: heißt

$$G(s) = \frac{s - \lambda_1}{s - (\lambda_1 + 1)} \frac{1}{s - \lambda_1} = \frac{1}{s - (\lambda_1 + 1)}.$$

Die Linearfaktoren der Entkopplungsnulstelle und des Eigenwertes des zweiten Teilsystems kürzen sich heraus, so dass die Reihenschaltung nur einen Pol bei  $\lambda_1 + 1$  besitzt.  $\square$

**Steuerbarer Unterraum.** Wohin kann man das System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B})$  steuern, wenn es nicht vollständig steuerbar ist? Diese Frage kann unter Nutzung der Überlegungen aus dem Abschn. 3.1.2 beantwortet werden. Dort wurde in Gl. (3.5) gezeigt, dass nur solche Zielzustände erreicht werden können, die sich als Linearkombinationen der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_S$  darstellen lassen. Die Menge dieser Zustände stellt einen Unterraum des Zustandsraumes  $\mathbb{R}^n$  dar. Man spricht deshalb vom *steuerbaren Unterraum* des Systems  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  und bezeichnet die Spalten der Matrix (3.6) als Erreichbarkeitsvektoren, weil sich alle durch die geeignete Wahl von  $\mathbf{u}(t)$  erreichbaren Zustände  $\mathbf{x}_e$  als Linearkombination dieser Vektoren darstellen lassen. Systeme  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$  mit einem Eingang können aus der Ruhelage  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  also in alle diejenigen Zustände  $\mathbf{x}_e$  überführt werden, die in der Form

$$\mathbf{x}_e = c_0 \mathbf{b} + c_1 \mathbf{A} \mathbf{b} + \dots + c_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{b} \quad (3.22)$$

mit reellen Koeffizienten  $c_i$  geschrieben werden können. Ist die Steuerbarkeitsmatrix regulär, so sind alle Vektoren  $\mathbf{A}^i \mathbf{b}$  linear unabhängig und jedes beliebige  $\mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^n$  lässt sich in der angegebenen Form darstellen. Hat die Matrix  $\mathbf{S}_S$  jedoch nur den Rang  $q < n$ , so sind nur  $q$  Vektoren linear unabhängig und  $\mathbf{x}_e$  muss in einem  $q$ -dimensionalen Unterraum von  $\mathbb{R}^n$  liegen.

#### Beispiel 3.4 Steuerbarer Unterraum eines Systems dritter Ordnung

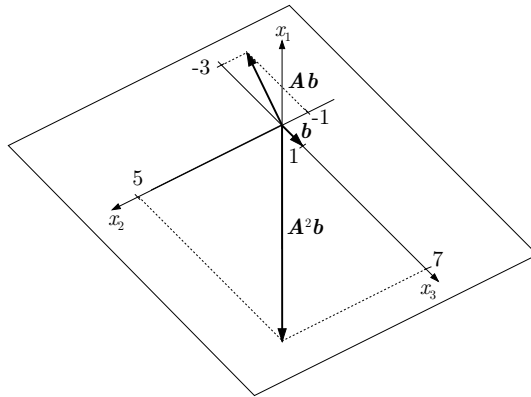
Für das System

$$\Sigma: \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

ist der steuerbare Unterraum in Abb. 3.11 dargestellt. Die Vektoren

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

liegen in der  $x_2/x_3$ -Ebene. Folglich können nur die in dieser Ebene liegenden Zustände aus der Ruhelage des Systems durch eine geeignet ausgewählte Steuerung  $u_{[0,t_e]}$  erreicht werden.  $\square$



**Abb. 3.11:** Darstellung der Spalten der Steuerbarkeitsmatrix im dreidimensionalen Zustandsraum

Betrachtet man das System in kanonischer Normalform, so führt bekanntlich jede Nullzeile von  $\tilde{B}$  dazu, dass eine kanonische Zustandsvariable  $\tilde{x}_i$  nicht steuerbar ist. Der steuerbare Teilraum ist dann gerade durch alle steuerbaren kanonischen Zustandsvariablen bestimmt.

#### Beispiel 3.5 Steuerbarkeit eines Systems in kanonischer Normalform

Ist die erste kanonische Zustandsvariable nicht steuerbar, weil die erste Zeile  $\tilde{b}_1^T$  der Matrix  $\tilde{B}$  eine Nullzeile ist, so gilt für diese Zustandsvariable die Gleichung

$$\dot{\tilde{x}}_1(t) = \lambda_1 \tilde{x}_1(t), \quad \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{01}.$$

Das heißt, diese Zustandsvariable bewegt sich unbeeinflusst vom Eingang entsprechend der Beziehung

$$\tilde{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \tilde{x}_{01}.$$

Wenn alle anderen Zustandsvariablen steuerbar sind, so können sie durch eine geeignete Steuerung  $\mathbf{u}_{[0, t_e]}$  zur Zeit  $t_e$  auf vorgegebene Werte  $\tilde{x}_{e2}, \tilde{x}_{e3}, \dots, \tilde{x}_{en}$  gebracht werden. Der zur Zeit  $t_e$  erreichte Zustand ist dann

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_e) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t_e} \tilde{x}_{01} \\ \tilde{x}_{e2} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{en} \end{pmatrix}.$$

Seine erste Komponente hängt von dem durch die Steuerung nicht beeinflussbaren Anfangswert  $\tilde{x}_{01}$  ab, während alle anderen Komponenten vorgegeben werden können. Der steuerbare Unterraum ist der durch die kanonischen Zustandsvariablen  $\tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \dots, \tilde{x}_n$  aufgespannte  $(n - 1)$ -dimensionale Raum.  $\square$

Betrachtet man das Steuerbarkeitsproblem in umgekehrter Weise, bei der das System aus einem von null verschiedenen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in den Nullzustand  $\mathbf{x}_e = \mathbf{0}$  ge-

bracht werden soll, so gelten die bisherigen Überlegungen sinngemäß für die Menge derjenigen Anfangszustände, für die diese Umsteuerung möglich ist.

Ganz allgemein kann man also die Bewegung  $\boldsymbol{x}(t)$ , die das System vom Anfangszustand  $\boldsymbol{x}_0$  unter der Einwirkung der Steuerung  $\boldsymbol{u}(t)$  ausführt, in einen steuerbaren und einen nicht steuerbaren Anteil zerlegen:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_{\text{stb}}(t) + \boldsymbol{x}_{\text{nstb}}(t). \quad (3.23)$$

Verwendet man kanonische Zustandsvariablen, so ist diese Trennung sehr einfach vorzunehmen. Die Zustandsvariablen sind in Abhängigkeit davon, ob sie steuerbar sind oder nicht, den beiden Teilvektoren zuzuordnen. Für das im Beispiel 3.4 angegebene dreidimensionale System gilt

$$\boldsymbol{x}_{\text{stb}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_2(t) \\ \tilde{x}_3(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}_{\text{nstb}}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d. h., der steuerbare Zustand liegt in dem durch  $\tilde{x}_2$  und  $\tilde{x}_3$  aufgespannten Unterraum, während der nicht steuerbare Anteil in dem durch  $\tilde{x}_1$  beschriebenen Unterraum liegt. Der Endzustand kann deshalb in der  $\tilde{x}_2/\tilde{x}_3$ -Ebene beliebig gewählt werden. Hat das System einen Anfangszustand mit nicht verschwindender Komponente  $\tilde{x}_1(0)$ , so bewegt es sich in  $\tilde{x}_1$ -Richtung unbeeinflusst von der Eingangsgröße.

Für allgemeine Zustandskoordinaten ist diese Aufteilung insofern schwieriger, als dass die Zustände keine Basisvektoren für die betreffenden Teilräume mehr sind, sondern, wie erläutert, die linear unabhängigen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix als eine Basis des steuerbaren Unterraumes dienen.

### Beispiel 3.6 Steuerbarer Unterraum eines Systems zweiter Ordnung

Das System

$$\Sigma : \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t), \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist offensichtlich nicht vollständig steuerbar, denn die Steuerbarkeitsmatrix

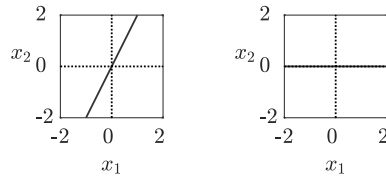
$$\boldsymbol{S}_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Rang eins. Wendet man das Hautuskriterium für die beiden Eigenwerte  $\lambda_1 = -4$  und  $\lambda_2 = 1$  an, so sieht man, dass der stabile Eigenwert  $\lambda_1$  nicht steuerbar ist, während  $\lambda_2$  steuerbar ist.

Vom Nullzustand ausgehend kann das System  $\Sigma$  nur Zustände  $\boldsymbol{x}_e$  erreichen, die sich in der Form (3.22)

$$\boldsymbol{x}_e = \begin{pmatrix} x_1(t_e) \\ x_2(t_e) \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$





**Abb. 3.12:** Steuerbarer Unterraum für das Beispiel in allgemeiner (links) und in kanonischer Zustandsraumdarstellung (rechts)

darstellen lassen, wobei hier nur ein Summand auftritt, da die zweite Spalte der Steuerbarkeitsmatrix von der ersten linear abhängig ist. Diese Zustände bilden eine Gerade im Zustandsraum  $\mathbb{R}^2$  mit der durch den Vektor  $\mathbf{b}$  festgelegten Richtung (Abb. 3.12 (links)).

Transformiert man das System durch

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,34 & 0,45 \\ -1,26 & 0,63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

in seine kanonische Normalform, so erhält man die Darstellung

$$\Sigma : \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2,24 \\ 0 \end{pmatrix} u(t).$$

Der steuerbare Unterraum liegt jetzt gerade in Richtung der kanonischen Zustandsvariablen  $\tilde{x}_1$ , wie in Abb. 3.12 rechts zu sehen ist.

Für verschwindenden Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  wird das System durch die skalare Eingangsgröße  $u(t)$  entlang der  $\tilde{x}_1$ -Achse gesteuert und kann dort auf jeden Endwert der Form

$$\tilde{\mathbf{x}}_e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{e1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Hat das System eine Anfangsauslenkung  $\tilde{\mathbf{x}}(0) = (\tilde{x}_{01}, \tilde{x}_{02})^T$ , so wird die Bewegung der zweiten Komponente

$$\tilde{x}_2(t) = e^{-4t} \tilde{x}_{02}$$

nur vom Anfangszustand  $\tilde{x}_{02}$ , aber nicht von der Steuerung beeinflusst, während die erste Komponente durch die Steuerung zielgerichtet beeinflusst werden kann. Der zu einem vorgegebenen Zeitpunkt  $t_e$  erreichbare Zustand kann nur in der ersten Komponente festgelegt werden, was durch die Schreibweise

$$\mathbf{x}_e = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{e1} \\ * \end{pmatrix}$$

ausgedrückt wird, in der der Stern einen von der Steuerung unabhängigen Wert darstellt. Diese Endzustände liegen nicht auf der in Abb. 3.12 markierten Geraden, sondern auf einer Parallelen zu dieser Geraden, die durch den Punkt  $\tilde{x}_2(t_e) = *$  verläuft.  $\square$

**Zerlegung eines Systems in ein steuerbares und ein nicht steuerbares Teilsystem.** Die vorherigen Betrachtungen haben gezeigt, dass man bei einem nicht vollständig steuerbaren System zwischen den steuerbaren und den nicht steuerbaren Vorgängen unterscheiden kann, wobei diese Vorgänge in disjunkten Teilräumen des Zustandsraumes liegen. Man kann deshalb das gegebene System in ein vollständig steuerbares und ein nicht steuerbares Teilsystem zerlegen, wobei das steuerbare Teilsystem das Steuerbarkeitskriterium (Satz 3.1) erfüllt, während das nicht steuerbare Teilsystem gar nicht vom Eingang  $u$  beeinflusst wird (Abb. 3.13).

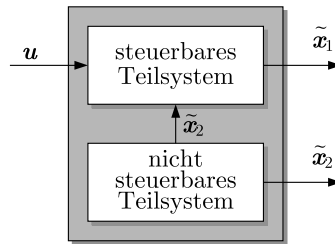


Abb. 3.13: Zerlegung eines nicht steuerbaren Systems

Die Zerlegung erfolgt durch eine Zustandstransformation

$$\tilde{x}(t) = T x(t),$$

wobei die Transformationsmatrix  $T$  so gewählt wird, dass nach einer Zerlegung des neuen Zustandsvektors  $\tilde{x}(t)$  in zwei Teilvektoren  $\tilde{x}_1(t)$  und  $\tilde{x}_2(t)$  ein Zustandsraummodell der Form

$$\Sigma : \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}}_1(t) \\ \dot{\tilde{x}}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (\tilde{C}_1 \quad \tilde{C}_2) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (3.24)$$

entsteht. Hat die Steuerbarkeitsmatrix den Rang  $n_S$

$$\text{Rang } S_S = n_S < n,$$

dann haben die quadratische Matrix  $\tilde{A}_{11}$  und die Matrix  $\tilde{B}_1$   $n_S$  Zeilen und der Vektor  $\tilde{x}_1(t)$  ist  $n_S$ -dimensional. Außerdem ist das Paar  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  vollständig steuerbar. Gleichung (3.24) beschreibt ein aus zwei Teilsystemen zerlegbares System, bei dem das Teilsystem mit dem Zustandsvektor  $\tilde{x}_1(t)$  vollständig steuerbar und das andere Teilsystem überhaupt nicht vom Eingangsvektor  $u(t)$  beeinflusst wird (Abb. 3.13).

Es gibt mehrere Wege, die Transformationsmatrix  $T$  so zu wählen, dass das System in der angegebenen Weise zerlegt wird. Bei diagonalähnlichen Matrizen besteht

eine Möglichkeit darin, die Transformationsmatrix  $T = V^{-1}$  für die kanonische Normalform zu verwenden, wobei  $V$  die Matrix der  $n$  Eigenvektoren der Matrix  $A$  ist. Dann ist  $\tilde{x}(t)$  der Vektor der kanonischen Zustandsvariablen und das System zerfällt nach einer Umordnung der Zustandsvariablen in der gewünschten Weise (wobei sogar  $\tilde{A}_{12} = O$  gilt). Andererseits kann man die Matrix  $T$  aus den  $n_S$  linear unabhängigen Spalten der Steuerbarkeitsmatrix  $S_S$  bilden, wenn man diese Vektoren durch  $n - n_S$  weitere linear unabhängige Vektoren ergänzt und alle diese Vektoren als Spalten von  $T$  verwendet.

Da der Zustandsvektor  $\tilde{x}_2(t)$  nicht steuerbar ist, spielt er für die Übertragungseigenschaften des Systems keine Rolle. Für die Übertragungsfunktionsmatrix des Systems  $\Sigma$  gilt deshalb

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1. \quad (3.25)$$

### 3.1.6 Erweiterungen

**Ausgangssteuerbarkeit.** Die bisherigen Überlegungen kann man auf das Problem übertragen, den Ausgang des Systems

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

vom Anfangswert  $y(0)$  in einen gegebenen Endwert  $y_e = y(t_e)$  zu überführen. Diese Eigenschaft wird Ausgangssteuerbarkeit genannt, während man die bisherige Steuerbarkeit genauer als Zustandssteuerbarkeit bezeichnet.

Bedingungen, unter denen das System vollständig ausgangssteuerbar ist, können in derselben Weise hergeleitet werden, wie für die Zustandssteuerbarkeit. Aus der Bewegungsgleichung für den Ausgang folgt eine Erweiterung von Gl. (3.5), die zeigt, dass der Ausgangsvektor alle diejenigen Werte annehmen kann, die sich als Linearkombination der Spalten von  $CB$ ,  $CA^iB$  und  $D$  darstellen lassen. Das System  $\Sigma = (A, B, C, D)$  ist genau dann vollständig ausgangssteuerbar, wenn der Rang der Matrix

$$S_{AS} = (CB \quad CAB \quad CA^2B \quad \dots \quad CA^{n-1}B \quad D)$$

mit der Anzahl der Ausgangsgrößen übereinstimmt:

Bedingung für Ausgangssteuerbarkeit: $\text{Rang } S_{AS} = p.$	(3.26)
---	--------

Da, wie immer, vorausgesetzt wird, dass  $\text{Rang } C = p$  gilt, ist jedes zustandssteuerbare System auch ausgangssteuerbar. Die Umkehrung gilt jedoch nicht. Das heißt, die Ausgangssteuerbarkeit ist eine schwächere Eigenschaft als die der Zustandssteuerbarkeit.

**Steuerbarkeit in einem Unterraum.** Eng verbunden mit der Ausgangssteuerbarkeit ist die Frage, ob man das System in dem durch

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)$$

beschriebenen Teilraumes des Zustandsraums  $\mathbb{R}^n$  in jeden beliebigen Punkt  $\mathbf{z}(t_e)$  steuern kann. Für die Dimension ( $p \times n$ ) der Matrix  $\mathbf{H}$  gelte  $p < n$ . Als notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Steuerbarkeit im Raum  $\mathbb{R}^p$  der Vektoren  $\mathbf{z}$  muss die Testmatrix

$$\mathbf{S}_{\text{SH}} = \mathbf{H}\mathbf{S}_{\text{S}} = (\mathbf{H}\mathbf{B} \quad \mathbf{H}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{H}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{H}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B})$$

vollen Rang haben. Die für die Ausgangssteuerbarkeit maßgebende Matrix  $\mathbf{S}_{\text{AS}}$  erhält man für nicht sprungfähige Systeme ( $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ ) aus dieser Beziehung mit  $\mathbf{C} = \mathbf{H}$ .

**Aufgabe 3.2\*\*** Steuerbarkeit und Übertragungsverhalten

Gegeben ist das System

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

1. Untersuchen Sie, welcher Eigenwert nicht steuerbar ist. Ist das System  $\Sigma$  ausgangsteuerbar?
2. Stellen Sie die Übertragungsfunktionsmatrix auf und vergleichen Sie deren Pole mit den Eigenwerten der Systemmatrix des Zustandsraummodells.
3. In welche Zustände  $\mathbf{x}(t_e) = \mathbf{y}(t_e)$  kann das System aus der Ruhelage  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  gesteuert werden?
4. Wie verändert sich der Systemausgang, wenn das System nicht aus der Ruhelage, sondern vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = (1 \quad 1)^T$  aus mit derselben Eingangsgröße erregt wird? □

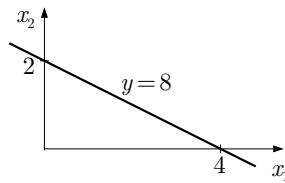
**Aufgabe 3.3\*\*** Systeme mit Polen und Nullstellen, die sich „fast“ kürzen

Wenn ein Eigenwert  $\lambda$  der Matrix  $\mathbf{A}$  zugleich Eingangsentkopplungsnullstelle ist, so ist er nicht steuerbar und erscheint nicht in der Gewichtsfunktionsmatrix bzw. der Übertragungsfunktionsmatrix. Was passiert, wenn sich die Eingangsentkopplungsnullstelle um  $\varepsilon$  von  $\lambda$  unterscheidet? Untersuchen Sie diese Fragestellung anhand eines Systems zweiter Ordnung in kanonischer Normalform, indem Sie die Übergangsfunktion in Abhängigkeit von  $\varepsilon$  berechnen. Zeigen Sie, dass der Eigenvorgang  $e^{\lambda t}$  umso weniger angeregt wird, je kleiner  $\varepsilon$  ist. □

## 3.2 Beobachtbarkeit

### 3.2.1 Problemstellung und Definition der Beobachtbarkeit

Bei den meisten technischen Systemen sind nicht alle Zustandsvariablen messbar. Stattdessen kann nur der Ausgangsvektor  $\mathbf{y}(t)$  messtechnisch erfasst werden. Da die Dimension von  $\mathbf{y}$  kleiner als die von  $\mathbf{x}$  ist, ist es schon aus Dimensionsgründen nicht möglich, aus dem aktuellen Wert  $\mathbf{y}(t)$  des Ausgangsvektors den aktuellen Wert  $\mathbf{x}(t)$  des Zustandsvektors zu berechnen.



**Abb. 3.14:** Zustände, die dieselbe Ausgangsgröße erzeugen

Wenn beispielsweise für die Ausgangsgröße

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

eines Systems zweiter Ordnung zum Zeitpunkt  $t_1$  der Wert

$$y(t_1) = 8$$

gemessen wird, so kann sich das System in jedem Zustand  $\mathbf{x}(t_1)$  befinden, für den die Beziehung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \end{pmatrix} = 8$$

gilt. Dies sind alle diejenigen Zustände, die auf der Geraden

$$x_1 = 4 - 2x_2$$

liegen (Abb. 3.14).

Den Zustand des Systems kann man jedoch ermitteln, wenn man die Bewegung des Systems nicht nur in einem Zeitpunkt  $t_1$ , sondern über einem Zeitintervall betrachtet und aus der Trajektorie  $\mathbf{y}(t)$ , ( $0 \leq t \leq t_e$ ) mit Hilfe des Modells den aktuellen Systemzustand rekonstruiert. Wenn das System durch eine Steuerung  $\mathbf{u}(t)$  von außen in seiner Bewegung beeinflusst wird, so muss man diese Steuerung kennen und in die Rekonstruktion des Zustands einfließen lassen. Man nennt ein System beobachtbar, wenn man den Zustand auf diese Weise berechnen kann.

Da es hier wie bei der Steuerbarkeit auf den zeitlichen Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgrößen ankommt, wird im Folgenden anstelle von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$  wieder mit den Bezeichnungen  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  und  $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$  gearbeitet, die diesen Sachverhalt hervorheben. Das Modell hat die gewohnte Form

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (3.27)$$

für nicht sprungfähige Systeme.

**Definition 3.2 (Beobachtbarkeit)**

Ein System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  heißt vollständig beobachtbar, wenn der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  aus dem über einem endlichen Intervall  $[0, t_e]$  bekannten Verlauf der Eingangsgröße  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  und der Ausgangsgröße  $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$  bestimmt werden kann.

**Beobachtbarkeit des ungestörten Systems.** Aus der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0}_{\mathbf{y}_{\text{frei}}(t)} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau}_{\mathbf{y}_{\text{erzw}}(t)}$$

erkennt man, dass der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  nur in die freie Bewegung  $\mathbf{y}_{\text{frei}}(t)$  eingeht und folglich nur aus dieser Bewegung berechnet werden kann. Aus dem gemessenen Verlauf  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$ ,  $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$  der Eingangs- und Ausgangsgrößen kann man die freie Bewegung entsprechend

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{y}(t) - \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau$$

ermitteln. Für die Lösung des Beobachtungsproblems muss man deshalb im Folgenden nur das nicht angeregte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

betrachten. Ist dieses System beobachtbar, so ist auch das angesteuerte System ( $\mathbf{u}(t) \neq 0$ ) beobachtbar. Die Beobachtbarkeit hängt folglich nur von den Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  ab, weshalb man auch von der Beobachtbarkeit des Paares  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  spricht.

**Beobachtbarkeit und vollständige Beobachtbarkeit.** Wie bei der Steuerbarkeitsdefinition fordert die Beobachtbarkeitsdefinition, dass jeder beliebige Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestimmbar sein soll. Deshalb

spricht man genauer von *vollständiger* Beobachtbarkeit, auch wenn im Folgenden dieses Attribut häufig weggelassen wird.

Wenn das System nicht vollständig beobachtbar ist, so ist die Beobachtbarkeits-eigenschaft an eine eingeschränkte Menge von Anfangszuständen geknüpft. Wie bei der Steuerbarkeit ist diese Menge ein Unterraum des Zustandsraumes  $\mathbb{R}^n$  (s. S. 104).

**Beobachtbarkeit und Rekonstruierbarkeit.** Bei dem geschilderten Beobach-tungsproblem kann man sich einerseits für die Bestimmung des Anfangszustands  $\mathbf{x}(0)$  interessieren, wie es in der Definition 3.2 getan wird. Man kann aber auch an dem am Ende des Beobachtungsintervalls angenommenen Zustand  $\mathbf{x}(t_e)$  interessiert sein. Wenn  $\mathbf{x}(t_e)$  aus  $\mathbf{u}_{[0,t_e]}$  und  $\mathbf{y}_{[0,t_e]}$  bestimmt werden kann, so wird das System vollständig *rekonstruierbar* genannt. Bei den hier behandelten zeitinvarianten linearen Systemen sind beide Eigenschaften äquivalent.

### 3.2.2 Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN

In diesem und den nachfolgenden Abschnitten werden Beobachtbarkeitskriterien ange-gaben, die den Steuerbarkeitskriterien sehr ähnlich sind. Es wird deshalb wie in den Abschnitten 3.1.2 – 3.1.5 vorgegangen und zunächst das auf KALMAN zurück-gehende Kriterium angegeben. Dabei wird offensichtlich werden, dass die Beob-achtbarkeit eine zur Steuerbarkeit duale Eigenschaft ist, so dass die nachfolgenden Untersuchungen wesentlich kürzer gefasst werden können.

Das Kalmankriterium bezieht sich auf die Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{pmatrix}, \quad (3.28)$$

die eine  $(p \cdot n \times n)$ -Matrix ist. Sie ist quadratisch, wenn das System nur eine Aus-gangsgröße besitzt.

#### **Satz 3.4 (Beobachtbarkeitskriterium von KALMAN)**

Das System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{C})$  ist genau dann vollständig beobachtbar, wenn die Beob-achtbarkeitsmatrix  $\mathbf{S}_B$  den Rang  $n$  hat:

$$\text{Rang } \mathbf{S}_B = n. \quad (3.29)$$

**Notwendigkeit der Bedingung (3.29).** Das Beobachtbarkeitsproblem ist lösbar, wenn die Gleichung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$$

nach  $\mathbf{x}_0$  auflösbar ist. Schreibt man diese Vektorgleichung ausführlich, so erhält man  $p$  Gleichungen für die  $n$  Unbekannten im Vektor  $\mathbf{x}_0$ , die wegen  $p < n$  nicht nach  $\mathbf{x}_0$  auflösbar sind. Da  $\mathbf{y}(t)$  aber für das Zeitintervall  $[0, t_e]$  bekannt ist, kann diese Gleichung im Prinzip unendlich oft, nämlich für alle Zeitpunkte des angegebenen Intervalls, hingeschrieben werden. Es müssen die Fragen untersucht werden, wie viele Gleichungen notwendig sind und ob das Gleichungssystem eindeutig auflösbar ist.

Diese Fragen sollen zunächst für ein System  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{c}^T)$  mit nur einem Ausgang beantwortet werden. Schreibt man die freie Bewegung für  $n$  Zeitpunkte  $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, t_e]$  untereinander, so erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_{\text{frei}}(t_1) &= \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \mathbf{x}_0 \\ y_{\text{frei}}(t_2) &= \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_2} \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) &= \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_n} \mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

das zur Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(t_1) \\ y_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_n} \end{pmatrix} \mathbf{x}_0$$

zusammengefasst werden kann. Dieses Gleichungssystem ist genau dann nach  $\mathbf{x}_0$  auflösbar, wenn die auf der rechten Seite stehende  $(n \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_1} \\ \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_2} \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{e}^{\mathbf{A}t_n} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

invertierbar ist

$$\text{Rang } \mathbf{M} = n, \quad (3.31)$$

denn dann erhält man den Anfangszustand aus

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(t_1) \\ y_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ y_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Die Frage ist, unter welcher Bedingung die  $n$  Zeitpunkte  $t_i$  so festgelegt werden können, dass die Matrix  $\mathbf{M}$  invertierbar ist.



Jede Zeile von  $M$  hat die Form  $\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t_i}$ , die sich mit Hilfe der Definitionsgleichung (I-5.10) für die Matrixexponentialfunktion und dem Cayley-Hamilton-Theorem (A2.43) folgendermaßen umformen lässt:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t_i} &= \mathbf{c}^T + \mathbf{c}^T \mathbf{A}t_i + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 \frac{t_i^2}{2!} + \mathbf{c}^T \mathbf{A}^3 \frac{t_i^3}{3!} + \dots \\ &= c_0(t_i)\mathbf{c}^T + c_1(t_i)\mathbf{c}^T \mathbf{A} + c_2(t_i)\mathbf{c}^T \mathbf{A}^2 + \dots + c_{n-1}(t_i)\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1}.\end{aligned}$$

Dabei sind die eingeführten Koeffizienten  $c_j(t_i)$ , ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ) von der Zeit  $t_i$  abhängig. Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die  $i$ -te Zeile der Matrix  $M$  eine Linearkombination der Zeilenvektoren

$$\mathbf{c}^T, \mathbf{c}^T \mathbf{A}, \mathbf{c}^T \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{n-1}$$

ist. Diese Darstellung von  $M$  zeigt, dass der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  nur dann aus  $n$  Messwerten des Ausgangs bestimmt werden kann, wenn die angegebenen Zeilenvektoren linear unabhängig sind. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung (3.29) für Systeme mit einem Ausgang nachgewiesen.

Für Systeme  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{C})$  mit  $p$  Ausgängen hat die Matrix  $M$  die Dimension  $(pn \times n)$ . Die Auflösbarkeitsbedingung (3.31) bleibt dieselbe, denn unter dieser Bedingung kann  $\mathbf{x}_0$  entsprechend

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_1) \\ \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_2) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{\text{frei}}(t_n) \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

aus den Messwerten  $\mathbf{y}_{\text{frei}}(t_i)$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) bestimmt werden. In Analogie zu den bisherigen Überlegungen kann man sehen, dass die Zeilen von  $M$  Linearkombinationen der Vektoren

$$\mathbf{c}_i^T, \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}, \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}^{n-1}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

sind, wobei  $\mathbf{c}_i^T$  die  $i$ -te Zeile der Matrix  $\mathbf{C}$  darstellt. Die Matrix  $M$  kann bei geeigneter Wahl der Zeitpunkte  $t_i$  genau dann den Rang  $n$  haben, wenn es unter allen diesen Zeilen  $n$  linear unabhängige gibt. Dieser Sachverhalt wird mit der Bedingung (3.29) ausgedrückt, die damit auch für Systeme mit mehreren Ausgangsgrößen notwendig für die Beobachtbarkeit ist.

**Bestimmung von  $\mathbf{x}_0$ .** Es wird nun angenommen, dass die Beobachtbarkeitsbedingung (3.29) erfüllt ist. Für die Bestimmung von  $\mathbf{x}_0$  gibt es dann u. a. die folgenden beiden Wege. Beim ersten Weg setzt man die Gl. (3.32) bzw. (3.33) für die Bestimmung von  $\mathbf{x}_0$  ein, wobei man die Zeitpunkte  $t_i$  so auswählt, dass die Matrix  $M$  den Rang  $n$  hat. Dies gelingt häufig einfach dadurch, dass man  $n$  beliebige, Zeitpunkte aus dem Intervall  $[0, t_e]$  herausgreift. Sollte die Matrix  $M$  nicht den vollen Rang haben, so wird die Rangbedingung i. Allg. schon nach geringfügiger Veränderung der ausgewählten Zeitpunkte  $t_i$  erfüllt.

Der zweite Weg verwendet die gramscche Beobachtbarkeitsmatrix

$$\mathbf{W}_B = \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} dt \quad (3.34)$$

die unter der Bedingung (3.29) für eine beliebige Endzeit  $t_e$  positiv definit und folglich invertierbar ist. Der Anfangszustand kann dann aus der Beziehung

$$\text{Bestimmung von } \mathbf{x}_0 : \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_B^{-1} \int_0^{t_e} e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T \mathbf{y}_{\text{frei}}(t) dt \quad (3.35)$$

ermittelt werden, wie man durch Einsetzen der Eigenbewegung

$$\mathbf{y}_{\text{frei}}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x}_0$$

leicht nachweisen kann. Zur Berechnung von  $\mathbf{W}_B$  für  $t_e = \infty$  kann man Gl. (3.9) mit veränderter rechter Seite anwenden:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}_{B\infty} + \mathbf{W}_{B\infty} \mathbf{A} = -\mathbf{C}^T \mathbf{C}. \quad (3.36)$$

### Beispiel 3.7 Beobachtbarkeit gekoppelter Rührkesselreaktoren

Bei den im Beispiel 3.1 betrachteten Rührkesselreaktoren kann nur die Konzentration im zweiten Behälter gemessen werden. Es ist zu untersuchen, ob die Konzentration im ersten Behälter aus dem Verlauf der Eingangs- und Ausgangsgröße rekonstruiert werden kann.

Aus dem auf S. 70 angegebenen Modell (3.10) erhält man die Beobachtbarkeitsmatrix

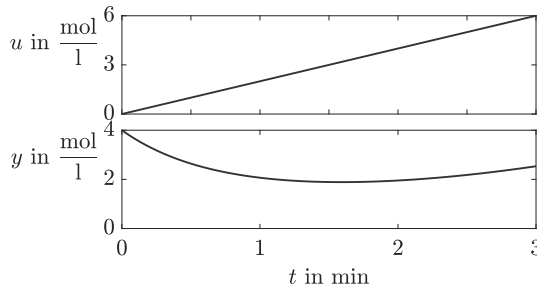
$$\mathbf{S}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{F}{V_2} & -\frac{F}{V_2} \end{pmatrix},$$

die offenbar den Rang 2 besitzt. Also kann man die Konzentration  $x_1$  des ersten Behälters aus den Messwerten bestimmen. Voraussetzung ist lediglich, dass die Reaktoren tatsächlich durchflossen werden ( $F \neq 0$ ). Andernfalls wären beide Reaktoren entkoppelt, so dass die Beobachtungsaufgabe aus offensichtlichen Gründen nicht lösbar wäre.

Wie aus den Messgrößen der Anfangszustand berechnet werden kann, wird im Folgenden für die Rührkesselreaktoren mit den im Beispiel 3.1 angegebenen Parametern erläutert, für die das Zustandsraummodell

$$\text{Rührkessel : } \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \\ \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \\ y(t) = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

entsteht. Das System wird von einem unbekanntem Anfangszustand ausgehend durch die Eingangsgröße



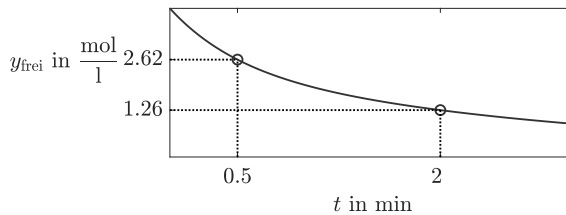
**Abb. 3.15:** Verhalten der gekoppelten Rührkesselreaktoren

$$u(t) = 2t, \quad 0 \leq t \leq 3$$

erregt, wobei die in Abb. 3.15 (unten) dargestellte Messkurve entsteht. Diese Kurve beschreibt die Überlagerung von erzwungener und freier Bewegung. Um aus ihr die freie Bewegung zu bestimmen, wird von dieser Messkurve die erzwungene Bewegung

$$y_{\text{erzw}}(t) = 2 \int_0^t (0 \ 1) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} (t-\tau)} \begin{pmatrix} 0,33 \\ 0 \end{pmatrix} \tau d\tau$$

subtrahiert, wodurch die in Abb. 3.16 gezeigte Kurve entsteht.



**Abb. 3.16:** Eigenbewegung der Reaktoren

Aus dieser Kurve werden nun zwei Messpunkte entnommen, die hier bei  $t_1 = 0,5$  min und  $t_2 = 2$  min liegen:

$$\begin{pmatrix} y_{\text{frei}}(0,5) \\ y_{\text{frei}}(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,62 \\ 1,26 \end{pmatrix}.$$

In der Matrix  $M$  nach Gl. (3.30) steht als erste Zeile

$$\mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t_1} = (0 \ 1) e^{\begin{pmatrix} -0,333 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} 0,5} = (0,574 \ 0,368).$$

Nach Berechnung der zweiten Zeile erhält man

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,574 & 0,368 \\ 0,594 & 0,0183 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist regulär und führt entsprechend Gl. (3.32) auf den Anfangszustand

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,998 \\ 4,003 \end{pmatrix}.$$

Von diesem Anfangszustand aus hat das System seine Bewegung begonnen. Die Zustandstrajektorie  $\boldsymbol{x}_{[0,3]}$  kann mit Hilfe des Modells, dieser Anfangsbedingung und der Eingangsgröße  $u_{[0,3]}$  berechnet werden.

**Diskussion.** Um die „Messkurven“ in Abb. 3.15 zu erzeugen, wurde mit dem Anfangszustand  $\boldsymbol{x}_0 = (2 \frac{\text{mol}}{\text{l}} \quad 4 \frac{\text{mol}}{\text{l}})^T$  gearbeitet. Der Rechenfehler bei der Rekonstruktion von  $\boldsymbol{x}_0$  wird nicht in erster Linie durch numerische Ungenauigkeiten, sondern durch die begrenzte Genauigkeit beim Ablesen der Messpunkte  $y(t_i)$  verursacht. In der praktischen Anwendung führen Messungenauigkeiten zu erheblich größeren Abweichungen als hier.

Bei diesem Beispiel stimmt die Ausgangsgröße mit der zweiten Zustandsvariablen überein. Der Messwert  $y(0)$  gibt deshalb den Anfangswert von  $x_2$  an:  $x_2(0) = y(0)$ . Das Beobachtungsproblem beinhaltet also nur die Bestimmung des Anfangswertes von  $x_1$ . Deshalb könnte man die Berechnung gegenüber dem allgemeinen Lösungsweg in diesem Beispiel etwas vereinfachen.  $\square$

**Folgerungen aus dem Kalmankriterium.** Ähnlich wie bei der Analyse der Steuerbarkeit können aus dem Kalmankriterium der Beobachtbarkeit folgende Schlussfolgerungen für das System  $\Sigma = (\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C})$  gezogen werden:

- Wenn das System  $\Sigma$  vollständig beobachtbar ist, so kann der Anfangszustand  $\boldsymbol{x}_0$  aus einem beliebig kurzen Ausschnitt des Verlaufes der Eingangs- und Ausgangsgrößen berechnet werden, d. h.,  $t_e$  kann beliebig klein sein.
- In Analogie zu den Steuerbarkeitsindizes können Beobachtbarkeitsindizes definiert werden. Sie zeigen, wie viele unterschiedliche Messpunkte  $y_i(t_j)$  der einzelnen Ausgangsgröße  $y_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) notwendig sind, um  $\boldsymbol{x}_0$  zu berechnen.

Die Untersuchungen dieses Kapitels betreffen nur die Frage, *ob* der Zustand aus den Eingangs- und Ausgangsgrößen bestimmt werden kann. Wie man dies unter den in der Praxis auftretenden Bedingungen, die insbesondere Messfehler und Störungen auf das System einschließen, tatsächlich macht, wird im Kap. 8 behandelt.

#### Aufgabe 3.4 Beobachtbarkeit bedeutet Unterscheidbarkeit von Ausgangstrajektorien

Alternativ zu Definition 3.2 kann man die Beobachtbarkeit als die Eigenschaft definieren, dass die von unterschiedlichen Anfangszuständen  $\boldsymbol{x}_0^1$  und  $\boldsymbol{x}_0^2$  ausgehenden Zustandstrajektorien zu unterscheidbaren Ausgangstrajektorien führen. Bezeichnet man die Ausgangsgröße, die das System mit den beiden Anfangszuständen erzeugt, mit  $y(t, \boldsymbol{x}_0^1)$  bzw.  $y(t, \boldsymbol{x}_0^2)$ , so nennt man das System beobachtbar, wenn es für beliebige Anfangszustände, die die Bedingung  $\boldsymbol{x}_0^1 \neq \boldsymbol{x}_0^2$  erfüllen, mindestens einen Zeitpunkt  $t$  gibt, für den die Relation  $y(t, \boldsymbol{x}_0^1) \neq y(t, \boldsymbol{x}_0^2)$  gilt.

Man kann diese Eigenschaft testen, indem man die Ausgangsgröße zusammen mit ihren ersten  $n - 1$  Ableitungen in Abhängigkeit vom Anfangszustand darstellt und untersucht, unter welchen Bedingungen der Vektor dieser Werte für zwei unterschiedliche Anfangsbedingungen nicht gleich sein kann.