

# 4

## Beschreibung linearer Systeme im Zeitbereich

*Nach der Darstellung linearer Systeme durch Differentialgleichungen wird in diesem Kapitel das Zustandsraummodell eingeführt, das auf dem fundamentalen systemtheoretischen Begriff des Zustands eines dynamischen Systems basiert. Es ist eine Modellform, auf der viele Analyse- und Entwurfsverfahren für Regelungen aufbauen.*

### 4.1 Modellbildungsaufgabe

Dieses Kapitel befasst sich mit der Aufstellung mathematischer Modelle. Entsprechend Abb. 4.1 wird ein dynamisches System  $\Sigma$  mit einer Eingangsgröße  $u(t)$  und einer Ausgangsgröße  $y(t)$  betrachtet. Das Modell soll den Zusammenhang zwischen beiden Signalen beschreiben, so dass man für ein gegebenes Eingangssignal  $u(t)$  das vom System  $\Sigma$  erzeugte Ausgangssignal  $y(t)$  berechnen kann.



**Abb. 4.1:** Strukturbild des Systems

In diesem Kapitel werden zwei Modellformen behandelt. Zunächst wird gezeigt, wie man dynamische Systeme durch Differentialgleichungen darstellen kann. Danach wird das Zustandsraummodell eingeführt. Die in beiden Fällen zu lösende Modellbildungsaufgabe kann folgendermaßen zusammengefasst werden:

<b>Modellbildungsaufgabe</b>	
Gegeben:	Dynamisches System $\Sigma$ mit Eingangsgröße $u$ und Ausgangsgröße $y$
Gesucht:	Differentialgleichung oder Zustandsraummodell

Im Kap. 6 werden weitere Modellformen behandelt, die das System  $\Sigma$  im Frequenzbereich repräsentieren.

Für die Verwendung der genannten Modelle ist es nicht nur wichtig zu wissen, welche mathematischen Eigenschaften diese Modelle haben. Für die Anwendung ist es mindestens genauso wichtig zu wissen, wie sich die physikalischen Eigenschaften dynamischer Systeme in diesen Modellen niederschlagen.

Bei der Aufstellung der Modelle geht man i. Allg. von den physikalischen Grundgleichungen aus. Dies sind bei elektrischen Systemen z. B. die Kirchhoff'schen Gesetze und bei mechanischen Systemen die Erhaltungssätze für Energie und Impuls. Das Aufstellen der in einem System wirkenden physikalischen Beziehungen und deren Umformung in eine Differentialgleichung bzw. in ein Zustandsraummodell bezeichnet man als *theoretische Modellbildung*. Dieser Modellbildungsweg wird für die meisten in diesem Buch behandelten Beispiele beschrrieben.

Der alternative Weg geht von Experimenten aus, bei denen man für eine spezielle Eingangsgröße  $u$  die Ausgangsgröße  $y$  misst und das Modell dann so auswählt, dass es den gemessenen Verlauf der Ausgangsgröße reproduziert. Dieser Modellbildungsweg wird als *experimentelle Prozessanalyse* oder *Identifikation* bezeichnet. Im Abschn. 5.7 wird kurz auf diesen Modellbildungsweg eingegangen.

**Voraussetzungen.** Im Folgenden werden nur Systeme betrachtet, die als Systeme mit konzentrierten Parametern behandelt werden können und für die als Modell folglich eine gewöhnliche Differenzialgleichung entsteht. Die dynamischen Eigenschaften der Systeme sollen zeitlich unveränderlich sein, so dass die Differentialgleichung konstante Koeffizienten bzw. die im Zustandsraummodell vorkommenden Matrizen und Vektoren konstante Elemente besitzen.

Das Verhalten der Systeme wird im Zeitintervall  $t = 0 \dots \infty$  untersucht und die Nachwirkung, die die Bewegung des Systems im Zeitintervall  $-\infty \dots 0$  auf das Systemverhalten im Zeitintervall  $0 \dots \infty$  hat, durch die Anfangsbedingung der Differentialgleichung bzw. den Anfangszustand des Systems erfasst. Deshalb werden alle Signale nur für das Zeitintervall  $t = 0 \dots \infty$  beschrieben und es wird angenommen, dass die Signale für  $t < 0$  verschwinden. Man nennt derartige Signale auch *kausale Signale*. Wenn man beispielsweise eine sinusförmige Eingangsgröße  $u(t)$  mit der Frequenz  $\omega$  und der Amplitude  $\bar{u}$  betrachtet, so ist die vollständige Beschreibung des Signals

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \bar{u} \sin \omega t & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

sehr umständlich. Um dies abzukürzen, wird im Folgenden für alle Signale angenommen, dass die erste Zeile von Gl. (4.1) gilt und es wird nur die zweite Zeile

$$u(t) = \bar{u} \sin \omega t \quad (4.2)$$

aufgeschrieben, ohne auf den Gültigkeitsbereich  $t \geq 0$  hinzuweisen.

Die vereinfachte Darstellung (4.2) kann zu Fehlern führen, wenn man die Signale in der Umgebung von  $t = 0$  betrachtet. Beispielsweise kann man aus dieser Darstellung nicht erkennen, dass  $u(t)$  an der Stelle  $t = 0$  nicht differenzierbar ist. Um derartige Fehler zu vermeiden, wird an den entsprechenden Stellen auf die exakte Darstellung (4.1) verwiesen.

## 4.2 Beschreibung linearer Systeme durch Differentialgleichungen

### 4.2.1 Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung

Die Differentialgleichung beschreibt den dynamischen Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße  $u(t)$  und der Ausgangsgröße  $y(t)$ , also die Übertragungseigenschaften des in Abb. 4.1 gezeigten Blocks. Sie hat die allgemeine Form

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ = b_q \frac{d^q u(t)}{dt^q} + b_{q-1} \frac{d^{q-1} u(t)}{dt^{q-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Gleichung (4.3) ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.  $a_i$  und  $b_i$  sind reellwertige Koeffizienten, die aus den physikalischen Parametern des Systems berechnet werden können. Die erste und zweite Ableitung nach der Zeit kennzeichnet man oft mit einem bzw. zwei Punkten über der abgeleiteten Größe:

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \dot{y}(t), & \frac{du(t)}{dt} &= \dot{u}(t) \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &= \ddot{y}(t), & \frac{d^2 u(t)}{dt^2} &= \ddot{u}(t). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung wird häufig so umgeformt, dass  $a_n = 1$  gilt:

Systembeschreibung durch eine Differentialgleichung:

$$\Sigma : \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t). \quad (4.4)$$

Es wird angenommen, dass für die Grade der höchsten Ableitungen von  $y$  und  $u$  die Beziehung

$$q \leq n$$

gilt, weil nur Systeme, die diese Bedingung erfüllen, technisch realisierbar sind. Die Differenz

$$\boxed{\text{für technisch realisierbare Systeme: } r = n - q \geq 0} \quad (4.5)$$

wird als *relativer Grad* (oder Relativgrad, Differenzordnung, Differenzgrad) des Systems bezeichnet. Dieser Wert wird im Folgenden eine wichtige Rolle spielen.

Bei der Systembeschreibung durch eine Differentialgleichung interessiert man sich für die zukünftige Bewegung, also für  $y(t)$  für  $t \geq 0$  (oder allgemeiner  $t \geq t_0$ ). Deshalb muss auch die Eingangsgröße nur für  $t \geq 0$  bekannt sein. Die Wirkung der Eingangsgröße für  $t < 0$  spiegelt sich in den  $n$  Anfangsbedingungen der Differentialgleichung wider, für die Werte  $y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}$  gegeben sein müssen:

$$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0) = y_{0n}, \dots, \dot{y}(0) = y_{02}, \quad y(0) = y_{01}. \quad (4.6)$$

Die lineare Differentialgleichung (4.4) hat die Eigenschaft, dass sie für eine beliebige im Zeitintervall  $t \geq 0$  gegebene Eingangsgröße  $u(t)$  eine *eindeutige* Lösung  $y(t)$  ( $t \geq 0$ ) besitzt.

## 4.2.2 Aufstellung der Differentialgleichung

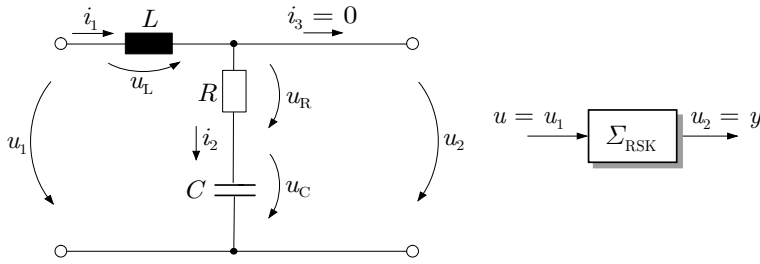
Die folgenden Beispiele zeigen, wie die Differentialgleichung (4.3) aus den physikalischen Grundgleichungen abgeleitet werden kann. Dabei wird offensichtlich, dass die Form der Gleichung unabhängig davon ist, ob elektrische, mechanische oder verfahrenstechnische Prozesse betrachtet werden. Bei allen weiteren regelungstechnischen Untersuchungen kann also davon ausgegangen werden, dass von der Regelstrecke ein Modell der Form (4.3) zur Verfügung steht.

### Beispiel 4.1 Aufstellung der Differentialgleichung eines Reihenschwingkreises

Betrachtet wird der Reihenschwingkreis  $\Sigma_{\text{RSK}}$  in Abb. 4.2, in der die Spannung  $u_1(t)$  eine von außen beeinflussbare Größe darstellt und die Spannung  $u_2(t)$  als Reaktion des Schwingkreises gemessen wird. Das System hat also das in der Abbildung rechts angegebene Strukturbild.  $R$ ,  $L$  und  $C$  stellen einen ohmschen Widerstand, eine Induktivität und eine Kapazität dar. Es wird angenommen, dass zur Zeit  $t = 0$  kein Strom durch die Induktivität fließt und die Kondensatorspannung einen bekannten Wert  $u_0$  besitzt:

$$i_1(0) = 0, \quad u_C(0) = u_0. \quad (4.7)$$

Ferner wird angenommen, dass der Schwingkreis nicht belastet ist und folglich  $i_3(t) = 0$  und  $i_1(t) = i_2(t)$  gilt.



**Abb. 4.2:** Schaltung und Blockschaltbild eines Reihenschwingkreises

Die Bauelemente sind durch die folgenden Gleichungen beschrieben:

$$u_R(t) = R i_1(t) \quad (4.8)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} \quad (4.9)$$

$$u_C(t) = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau. \quad (4.10)$$

Die Kirchhoff'schen Gesetze besagen, dass die Summe der Spannungen innerhalb einer Masche gleich null ist. Also gilt für die rechte Masche

$$u_2(t) = u_R(t) + u_C(t) \quad (4.11)$$

und für die linke Masche

$$u_1(t) = u_L(t) + u_R(t) + u_C(t). \quad (4.12)$$

Im Folgenden ist aus den angegebenen Gleichungen eine Differentialgleichung abzuleiten, in der nur noch die Eingangsgröße  $u(t) = u_1(t)$  und die Ausgangsgröße  $y(t) = u_2(t)$  sowie deren Ableitungen vorkommen. Aus (4.9), (4.11) und (4.12) folgen die Beziehungen

$$u_1(t) = L \frac{di_1(t)}{dt} + u_2(t)$$

und

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u_1(t) - u_2(t)). \quad (4.13)$$

Wird die zweite Gleichung nach der Zeit abgeleitet, so erhält man

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} = \frac{1}{L} \left( \frac{du_1(t)}{dt} - \frac{du_2(t)}{dt} \right). \quad (4.14)$$

Aus den Gln. (4.8), (4.10) und (4.11) erhält man die Beziehung

$$u_2(t) = R i_1(t) + u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_1(\tau) d\tau, \quad (4.15)$$

die zweimal nach der Zeit abgeleitet die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u_2(t)}{dt^2} = R \frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \frac{di_1(t)}{dt}$$

ergibt. Mit Hilfe der Gln. (4.13) und (4.14) erhält man schließlich die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{u}_2(t) = \frac{R}{L}(\dot{u}_1(t) - \dot{u}_2(t)) + \frac{1}{LC}(u_1(t) - u_2(t)).$$

Diese Gleichung kann in die Standardform überführt werden:

$$\Sigma_{\text{RSK}} : CL\ddot{u}_2(t) + CR\dot{u}_2(t) + u_2(t) = CR\dot{u}_1(t) + u_1(t). \quad (4.16)$$

Gleichung (4.3) gilt mit

$$\begin{aligned} a_2 &= CL, & a_1 &= CR, & a_0 &= 1 \\ b_1 &= CR, & b_0 &= 1. \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingungen (4.7) erhält man aus Gl. (4.15) die Beziehung

$$u_2(0) = u_0.$$

Eine Differentiation von Gl. (4.15) und Einsetzen von Gl. (4.13) liefert

$$\dot{u}_2(t) = \frac{R}{L}(u_1(t) - u_2(t)) + \frac{1}{C}i_1(t).$$

Da nach Voraussetzung  $i_1(0) = i_2(0) = 0$  ist und  $u_1(t) = 0$  für  $t < 0$  gilt, ist die zweite Anfangsbedingung

$$\dot{u}_2(0) = -\frac{R}{L}u_0. \quad \square$$

#### Beispiel 4.2 Aufstellung der Differentialgleichung eines Feder-Masse-Schwingers

Als Beispiel eines mechanischen Systems wird der Feder-Masse-Schwinger  $\Sigma_{\text{FMS}}$  in Abb. 4.3 betrachtet, bei dem  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  die Positionen der in der Abbildung gekennzeichneten Punkte bezeichnen. Es wird angenommen, dass das System nur Bewegungen entlang einer vertikalen Achse ausführen kann.  $x_1(t)$  ist die Eingangsgröße des Systems, d. h., der Schwinger wird bei einer von außen erzwungenen Bewegung des oberen Endes der Feder betrachtet. Beobachtet wird die Position  $x_3(t)$  der Masse  $m$ .  $c$  ist die Federkonstante und  $d$  die Dämpfungskonstante. Es wird davon ausgegangen, dass die Größen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  und  $x_3(t)$  so gemessen werden, dass in der Ruhelage  $x_i = 0$ , ( $i = 1, 2, 3$ ) gilt. Die Erdanziehung wird im Folgenden vernachlässigt.

Entsprechend dem Newton'schen Gesetz ist die Beschleunigung der Masse  $m$  proportional zur Summe der äußeren Kräfte  $F_m$ :

$$F_m(t) = m \ddot{x}_3(t). \quad (4.17)$$

Bei geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wird die durch den Dämpfer übertragene Kraft  $F_d(t)$  durch die Relativbewegung der beiden Enden des Dämpfers und die Dämpfungskonstante bestimmt:

$$F_d(t) = d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_3(t)). \quad (4.18)$$

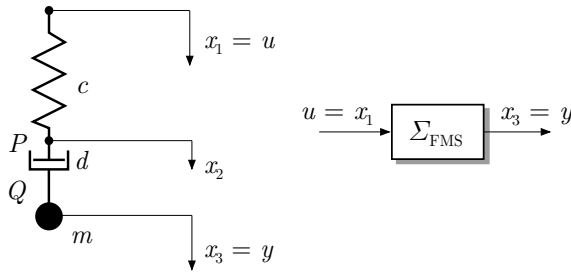


Abb. 4.3: Feder-Masse-Schwinger

Die Federkraft  $F_c(t)$  lässt sich aus den Positionen  $x_1(t)$  und  $x_2(t)$  der Federenden sowie der Federkonstanten berechnen:

$$F_c(t) = c(x_1(t) - x_2(t)). \quad (4.19)$$

Für die Kopplung der drei Elemente erhält man aus den Kräftegleichgewichten an den Punkten  $P$  und  $Q$  zwei algebraische Beziehungen. Da die Erdanziehung vernachlässigt wird, ist am Punkt  $Q$  die auf die Masse wirkende Kraft  $F_m(t)$  gleich der vom Dämpfer ausgeübten Kraft  $F_d(t)$ :

$$F_m(t) = F_d(t). \quad (4.20)$$

Andererseits stimmt im Punkt  $P$  die Federkraft  $F_c(t)$  mit der Dämpferkraft  $F_d(t)$  überein:

$$F_d(t) = F_c(t). \quad (4.21)$$

Die Gln. (4.17) – (4.21) beschreiben das Feder-Masse-System vollständig. Die folgenden Umformungen dienen dazu, aus diesen Beziehungen eine Differentialgleichung abzuleiten, in der nur die Eingangsgröße  $u(t) = x_1(t)$  und die Ausgangsgröße  $y(t) = x_3(t)$  vorkommt. Aus den Gln. (4.17) und (4.19) – (4.21) erhält man

$$\ddot{x}_3(t) = \frac{c}{m}(x_1(t) - x_2(t)) \quad (4.22)$$

und aus den Gln. (4.17), (4.18) und (4.20)

$$\dot{x}_2(t) = \frac{m}{d}\dot{x}_3(t) + \dot{x}_3(t).$$

Um  $x_2(t)$  aus Gl. (4.22) zu eliminieren, wird die letzte Gleichung nach der Zeit integriert:

$$x_2(t) - x_2(0) = \frac{m}{d}\dot{x}_3(t) + x_3(t) - \left(\frac{m}{d}\dot{x}_3(0) + x_3(0)\right).$$

Damit diese Gleichung für alle Zeitpunkte  $t$  erfüllt ist, muss

$$x_2(t) = \frac{m}{d}\dot{x}_3(t) + x_3(t)$$

gelten. In Gl. (4.22) eingesetzt erhält man die gesuchte Differentialgleichung

$$\Sigma_{\text{FMS}} : \quad \ddot{x}_3(t) = \frac{c}{m}x_1(t) - \frac{c}{m}\frac{m}{d}\dot{x}_3(t) - \frac{c}{m}x_3(t)$$

und nach Umstellung

$$\frac{m}{c}\ddot{x}_3(t) + \frac{m}{d}\dot{x}_3(t) + x_3(t) = x_1(t). \quad (4.23)$$

Diese Gleichung hat die Standardform (4.3) mit

$$a_2 = \frac{m}{c}, \quad a_1 = \frac{m}{d}, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1. \quad \square$$

### Beispiel 4.3 Aufstellung der Differentialgleichung für einen Rührkesselreaktor

Als drittes Beispiel wird gezeigt, wie für den in Abb. 4.4 gezeigten homogenen durchmischten Rührkesselreaktor  $\Sigma_{\text{RKR}}$  ein dynamisches Modell aufgestellt werden kann. Der Reaktor arbeitet mit konstanter Flüssigkeitshöhe, d. h., der Massenstrom  $w$  (gemessen in  $\frac{\text{kg}}{\text{min}}$ ) der zulaufenden Flüssigkeit ist gleich dem der ablaufenden Flüssigkeit.

Die elektrische Heizung des Reaktors liefert pro Zeiteinheit eine konstante Wärmemenge  $\dot{Q}$ . Die Temperatur  $T_z(t)$  der zulaufenden Flüssigkeit beeinflusst die Temperatur  $T(t)$  der im Reaktor befindlichen Flüssigkeit. Das Modell soll den Zusammenhang zwischen beiden Temperaturen beschreiben.

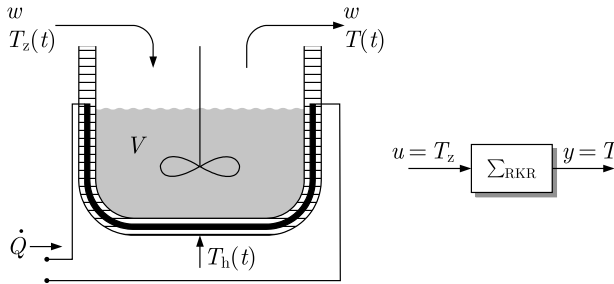


Abb. 4.4: Rührkesselreaktor

In die Wärmebilanz der Flüssigkeit gehen die durch den Zulauf pro Zeiteinheit dem Reaktor zugeführte Wärme  $wcT_z(t)$ , die durch den Ablauf entnommene Wärme  $wcT$  sowie die über die Heizung pro Zeiteinheit zugeführte Wärme  $\alpha A(T_h(t) - T(t))$  ein. Dabei bezeichnet  $c$  die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit,  $\alpha$  den Wärmeübergangskoeffizienten der Reaktorwand zur Flüssigkeit sowie  $A$  die Fläche der geheizten Reaktorwand. Da sich die Summe dieser pro Zeiteinheit dem Reaktor zugeführten Wärme in einer Temperaturerhöhung niederschlägt, erhält man folgende Differentialgleichung:

$$mc \frac{dT(t)}{dt} = wcT_z(t) - wcT(t) + \alpha A(T_h(t) - T(t)). \quad (4.24)$$

In die Wärmebilanz der geheizten Reaktorwand geht die pro Zeiteinheit durch die Heizung der Wand zugeführte Wärme  $\dot{Q}$  sowie die an die Flüssigkeit abgegebene Wärme  $\alpha A(T_h(t) - T(t))$  ein, woraus sich folgende Differentialgleichung ergibt:

$$m_h c_h \frac{dT_h(t)}{dt} = \dot{Q} - \alpha A(T_h(t) - T(t)). \quad (4.25)$$



Dabei bezeichnen  $m_h$  und  $c_h$  die Masse bzw. die spezifische Wärmekapazität der Reaktorwand.

Die gesuchte Differentialgleichung für den Reaktor erhält man durch Umformung der beiden angegebenen Gleichungen. Stellt man die erste Gleichung nach  $T_h(t)$  um, so erhält man

$$T_h(t) = \frac{mc}{\alpha A} \frac{dT(t)}{dt} - \frac{wc}{\alpha A} T_z(t) + \frac{wc}{\alpha A} T(t) + T(t).$$

Durch Differentiation ergibt sich daraus

$$\frac{dT_h(t)}{dt} = \frac{mc}{\alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} - \frac{wc}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + \left(1 + \frac{wc}{\alpha A}\right) \frac{dT(t)}{dt}.$$

Nachdem man beide Gleichungen in (4.25) eingesetzt hat, erhält man

$$\begin{aligned} m_h c_h \left( \frac{mc}{\alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} - \frac{wc}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + \left(1 + \frac{wc}{\alpha A}\right) \frac{dT(t)}{dt} \right) \\ = \dot{Q} - \alpha A \left( \frac{mc}{\alpha A} \frac{dT(t)}{dt} - \frac{wc}{\alpha A} T_z(t) + \frac{wc}{\alpha A} T(t) + T(t) - T(t) \right) \end{aligned}$$

und nach Umstellung

$$\begin{aligned} \frac{m_h c_h mc}{\alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \left( m_h c_h \left(1 + \frac{wc}{\alpha A}\right) + mc \right) \frac{dT(t)}{dt} + wcT(t) \\ = \frac{m_h c_h wc}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + wcT_z(t) + \dot{Q} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Sigma_{\text{RK}} : \quad \frac{m_h c_h m}{w \alpha A} \frac{d^2T(t)}{dt^2} + \left( \frac{m_h c_h}{wc} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w} \right) \frac{dT(t)}{dt} + T(t) \\ = \frac{m_h c_h}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + T_z(t) + \frac{1}{wc} \dot{Q}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dies ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der als zeitabhängige Größen die Eingangsgröße  $T_z(t)$  und die Ausgangsgröße  $T(t)$  des Reaktors vorkommen. Die Gleichung hat aber noch nicht die vorgeschriebene Gestalt (4.3), denn auf der rechten Seite steht die Konstante  $\frac{\dot{Q}}{wc}$ .

Diese Konstante kann man dadurch eliminieren, dass man das statische Verhalten des Reaktors berechnet und im Modell nur die Abweichungen von diesem Verhalten berücksichtigt. Bei konstanter Zulauftemperatur  $T_z(t) = \bar{T}_z$  stellt sich nach langer Zeit (theoretisch bei  $t \rightarrow \infty$ ) eine konstante Temperatur  $T(t) = \bar{T}$  ein, die man dadurch berechnen kann, dass man dem statischen Zustand entsprechend alle Ableitungen gleich null setzt. Man erhält die Gleichung

$$\bar{T} = \bar{T}_z + \frac{1}{wc} \dot{Q}, \quad (4.27)$$

die aussagt, dass sich die Reaktortemperatur gegenüber der Zulauftemperatur erhöht und zwar um den auf die Zulaufmenge und die spezifische Wärmekapazität der Flüssigkeit bezogene Wärmestrom  $\dot{Q}$  der Heizung.

Bezeichnen  $\delta T(t)$  und  $\delta T_z(t)$  die Abweichungen der Temperaturen von diesen Arbeitspunktwerten

$$\begin{aligned} \delta T(t) &= T(t) - \bar{T} \\ \delta T_z(t) &= T_z(t) - \bar{T}_z, \end{aligned}$$

so gelangt man durch Einsetzen in die Gl. (4.26) zu der Differentialgleichung

$$\frac{m_h c_h m}{w \alpha A} \frac{d^2 \delta T(t)}{dt^2} + \left( \frac{m_h c_h}{wc} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w} \right) \frac{d \delta T(t)}{dt} + \delta T(t) = \frac{m_h c_h}{\alpha A} \frac{d \delta T_z(t)}{dt} + \delta T_z(t),$$

die die vorgegebene Form (4.3) besitzt. Da in der Regelungstechnik häufig nicht mit absoluten Werten, sondern mit Abweichungen von einem gegebenen Arbeitspunkt gearbeitet wird, ist es üblich, an Stelle der Abweichungen  $\delta T$  und  $\delta T_z$  wieder die alten Formelzeichen  $T$  bzw.  $T_z$  zu schreiben und sich dabei zu merken, dass in das Modell die Abweichungen vom Arbeitspunkt eingehen:

$$\Sigma_{\text{RKR}} : \frac{m_h c_h m}{w \alpha A} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \left( \frac{m_h c_h}{wc} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w} \right) \frac{dT(t)}{dt} + T(t) = \frac{m_h c_h}{\alpha A} \frac{dT_z(t)}{dt} + T_z(t).$$

Diese Gleichung hat die Standardform (4.3), wobei gilt

$$a_2 = \frac{m_h c_h m}{w \alpha A}, \quad a_1 = \frac{m_h c_h}{wc} + \frac{m_h c_h}{\alpha A} + \frac{m}{w}, \quad a_0 = 1$$

$$b_1 = \frac{m_h c_h}{\alpha A}, \quad b_0 = 1. \quad \square$$

Die Beispiele zeigen, dass die Differentialgleichung (4.3) in vier Schritten abgeleitet wird:

#### Algorithmus 4.1 Aufstellung einer Differentialgleichung

**Gegeben:** Kontinuierliches System  $\Sigma$  mit Eingang  $u$  und Ausgang  $y$

1. **Systemzerlegung:** Zerlegen Sie das System in Komponenten.
2. **Komponentenmodelle:** Schreiben Sie die physikalischen Gesetze auf, die das Verhalten der Komponenten beschreiben.
3. **Kopplungsbeziehungen:** Schreiben Sie die Beziehungen auf, die zwischen den Komponenten bestehen.
4. **Modellumformung:** Fassen Sie die Gleichungen zu einer Differentialgleichung zusammen.

**Ergebnis:** Differentialgleichung der Form (4.3), die das System  $\Sigma$  repräsentiert.

Nur der vierte Schritt hängt davon ab, welches Signal als Eingangsgröße und welches als Ausgangsgröße betrachtet wird. So könnte bei dem Reihenschwingkreis an Stelle der Spannung  $u_2(t)$  auch der Strom  $i_2(t)$  als Ausgangsgröße genutzt werden. Bei der Modellierung würden dann dieselben Bauelementebeschreibungen und Maschengleichungen verwendet, diese jedoch zu einer Differentialgleichung umgeformt werden, in die  $i_2(t)$  an Stelle von  $u_2(t)$  als Ausgangsgröße einging.

Welche Methoden bzw. Gesetze angewendet werden müssen, um zu den Komponentenmodellen und den Kopplungsbeziehungen zu gelangen, hängt vom Charakter des betrachteten Systems ab.

- **Elektrische und elektronische Systeme** werden durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Kann man das System zunächst in ein Schaltbild überführen, so wendet man für die Modellbildung die Kirchhoff'schen Gesetze an.
- **Verfahrenstechnische Anlagen** werden zunächst in Bilanzräume unterteilt. Für diese Räume werden dann Energie- und Stoffbilanzen aufgestellt. Die Koppelgleichungen für die Bilanzräume ergeben sich aus dem Energie- bzw. Stoffaustausch zwischen diesen Räumen.
- **Mechanische Systeme** werden durch Kräfte- und Momentengleichungen beschrieben.

Die hier aufgezählten Prinzipien werden auch in vielen anderen Disziplinen eingesetzt, beispielsweise bei der Verkehrsflussmodellierung, bei der ein „Erhaltungssatz“ für die in einen Straßenabschnitt hinein- bzw. herausfahrenden Fahrzeuge als Grundlage der Modellbildung dient.

#### Aufgabe 4.1 Erweiterung des Modells aus Beispiel 4.1

Wie muss das in Beispiel 4.1 aufgestellte Modell erweitert werden, wenn die rechten Klemmen des Schwingkreises entweder durch einen ohmschen Widerstand  $R_1$  oder durch eine Kapazität  $C_2$  verbunden werden? Geben Sie für beide Fälle die Differentialgleichung an. Hat sich die Ordnung der Differentialgleichung geändert?  $\square$

#### Aufgabe 4.2 Thermisches Verhalten eines Rührkesselreaktors

Im Beispiel 4.3 wurde ein Rührkesselreaktor bei konstanter Heizleistung  $\dot{Q}$  und veränderlicher Temperatur  $T_z(t)$  des Zuflusses betrachtet. Wenn man eine Regelung entwerfen will, die die Flüssigkeitstemperatur  $T(t)$  im Reaktor durch Veränderung der Heizleistung  $\dot{Q}(t)$  konstant halten soll, braucht man ein Modell, das den Zusammenhang zwischen der Heizleistung  $\dot{Q}(t)$  als Eingangsgröße und der Flüssigkeitstemperatur  $T(t)$  als Ausgangsgröße bei konstanter Temperatur  $T_z$  des Zuflusses beschreibt. Wie heißt diese Differentialgleichung? Wodurch unterscheidet sich der Modellbildungsweg, auf dem Sie diese Differentialgleichung erhalten, von dem im Beispiel 4.3 behandelten?  $\square$

### 4.2.3 Linearität dynamischer Systeme

Ein dynamisches System  $\Sigma$  heißt *linear*, wenn sich die Wirkungen zweier linear überlagerter Eingangssignale am Ausgang des Systems in gleicher Weise linear überlagern (*Superpositionsprinzip*). Wird also für  $u(t)$  die Linearkombination

$$u(t) = k u_1(t) + l u_2(t) \quad (4.28)$$

der beiden Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  eingesetzt, so fordert das Superpositionsprinzip, dass sich die dabei erhaltene Ausgangsgröße  $y(t)$  als Linearkombination

$$y(t) = k y_1(t) + l y_2(t) \quad (4.29)$$

darstellen lässt. Dabei ist  $y_1(t)$  die Lösung der Differentialgleichung (4.3) mit  $u = u_1(t)$  und  $y_2(t)$  die Lösung für  $u = u_2(t)$ , d. h., es gilt

$$a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1(t) = b_q \frac{d^q u_1}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_1}{dt} + b_0 u_1(t) \quad (4.30)$$

$$a_n \frac{d^n y_2}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2(t) = b_q \frac{d^q u_2}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2(t). \quad (4.31)$$

Für diese Beziehung wird die vereinfachende Schreibweise

$$u_1(t) \mapsto y_1(t), \quad u_2(t) \mapsto y_2(t) \quad (4.32)$$

eingeführt. Der Pfeil  $\mapsto$  kennzeichnet also das durch Gl. (4.3) beschriebene dynamische System  $\Sigma$  als Funktionseinheit, die  $u_1(t)$  in  $y_1(t)$  bzw.  $u_2(t)$  in  $y_2(t)$  überführt.

Mit dieser Schreibweise kann die Linearitätseigenschaft des dynamischen Systems durch

Linearität:  $u(t) = k u_1(t) + l u_2(t) \mapsto y(t) = k y_1(t) + l y_2(t)$

(4.33)

dargestellt werden, wobei für die Komponenten von  $y(t)$  und  $u(t)$  die Beziehung (4.32) erfüllt ist. Zu beachten ist, dass die Beziehung (4.33) auch für die Anfangsbedingungen (4.6) gelten muss, d. h., die Linearitätseigenschaft gilt nur unter der Bedingung

$$\frac{d^i y}{dt^i}(0) = k \frac{d^i y_1}{dt^i}(0) + l \frac{d^i y_2}{dt^i}(0), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.34)$$

Diese Bedingung ist insbesondere dann erfüllt, wenn sich das System zur Zeit  $t = 0$  in der Ruhelage befindet und folglich alle Anfangsbedingungen verschwinden.

**Beweis der Linearitätseigenschaft.** Um die angegebene Linearitätseigenschaft zu beweisen, setzt man die Beziehungen (4.28) und (4.29) in die linke Seite von der Differentialgleichung (4.3) ein, wodurch man

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n (k y_1 + l y_2)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d(k y_1 + l y_2)}{dt} + a_0 (k y_1 + l y_2) \\ &= k \left( a_n \frac{d^n y_1}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_1}{dt} + a_0 y_1 \right) + l \left( a_n \frac{d^n y_2}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy_2}{dt} + a_0 y_2 \right) \end{aligned}$$

erhält. Ein Vergleich der letzten Zeile mit den Gln. (4.30) und (4.31) zeigt, dass

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n (k y_1 + l y_2)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d(k y_1 + l y_2)}{dt} + a_0 (k y_1 + l y_2) \\ &= k \left( b_q \frac{d^q u_1}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_1}{dt} + b_0 u_1 \right) + l \left( b_q \frac{d^q u_2}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du_2}{dt} + b_0 u_2 \right) \\ &= b_q \frac{d^q u}{dt^q} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \end{aligned}$$

gilt und  $y(t) = ky_1(t) + ly_2(t)$  folglich die Lösung der Differentialgleichung (4.3) für  $u(t) = ku_1(t) + lu_2(t)$  darstellt.

**Diskussion.** Die Linearität des Systems schlägt sich in der Tatsache nieder, dass die das System beschreibende Differentialgleichung linear ist. Beide Seiten der Gleichung stellen Linearkombinationen der Signale  $u(t)$  und  $y(t)$  sowie deren Ableitungen dar. Es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass die Klasse der linearen Differentialgleichungen nicht auf die der Form (4.3) beschränkt ist.

Gewöhnliche Differentialgleichungen heißen linear, wenn sie die Form

$$f_n(t) \frac{d^n y(t)}{dt^n} + f_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + f_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + f_0(t)y(t) + f(t) = 0 \quad (4.35)$$

haben, wobei  $f(t), f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$  gegebene Funktionen der Zeit  $t$  oder Konstante sind. Diese Gleichungen sind linear in dem Sinne, dass sich ihre Lösungen  $y(t)$  aus den Lösungen der homogenen und der inhomogenen Gleichungen zusammensetzen (vgl. Abschn. 5.2.1).

Die Differentialgleichung (4.3) ist linear, denn die Funktionen  $f_0(t), f_1(t), \dots, f_n(t)$  entsprechen den Konstanten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  und die rechte Seite der Funktion  $-f(t)$ . Aus diesem Vergleich sieht man, dass bei linearen Systemen die Funktion  $f(t)$  in Gl. (4.35) auf Linearkombinationen von  $u(t), \dot{u}(t), \dots, \frac{d^q u(t)}{dt^q}$  eingeschränkt wird und insbesondere keine Konstante enthält. Der Grund dafür liegt in der Tatsache, dass bei dynamischen Systemen nicht wie in der Mathematik die Überlagerung der homogenen und inhomogenen Lösungen als Kriterium für die Linearität herangezogen wird, sondern die Tatsache, dass Linearkombinationen von Eingangsgrößen durch das System entsprechend Gl. (4.33) in Linearkombinationen von Ausgangsgrößen abgebildet werden. Lineare dynamische Systeme sind also durch eine spezielle Klasse linearer Differentialgleichungen beschrieben.

#### 4.2.4 Kausalität

Eine wichtige Eigenschaft dynamischer Systeme ist ihre Kausalität. Die Kausalität besagt, dass der Wert der Eingangsgröße zur Zeit  $\bar{t}$  das Verhalten des Systems nur für zukünftige Zeitpunkte  $t \geq \bar{t}$  beeinflussen kann.

Betrachtet man die in einem System ablaufenden physikalischen Vorgänge, so ist die Kausalität eine selbstverständliche Eigenschaft. Beim Entwurf von Reglern kann es jedoch vorkommen, dass Reglergesetze entstehen, für die diese Kausalitätseigenschaft nicht zutrifft. Im Folgenden muss deshalb untersucht werden, wie man erkennen kann, ob ein System kausal ist.

Zur Definition der Kausalität wird das Verhalten des Systems für zwei „Experimente“ betrachtet, bei denen das System mit den Eingangsgrößen  $u = u_1$  bzw.  $u = u_2$  angeregt wird, die bis zum Zeitpunkt  $T$  gleich sind, d. h., für die die Beziehung

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (4.36)$$

gilt. Es wird vorausgesetzt, dass alle Anfangsbedingungen der Differentialgleichung verschwinden. Ein dynamisches System ist kausal, wenn für beliebige Zeitpunkte  $T$  und beliebig gewählte Funktionen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  mit  $0 \leq t \leq \infty$ , für die die

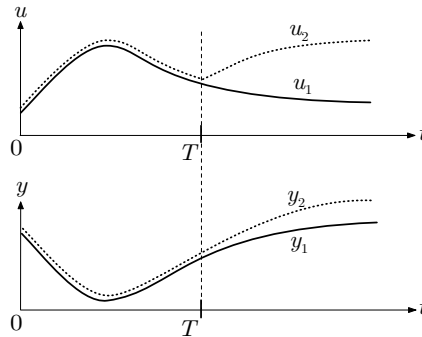
Beziehung (4.36) gilt, die beiden durch diese Eingangsgrößen hervorgerufenen Ausgangsgrößen  $y_1$  und  $y_2$  die Beziehung

$$y_1(t) = y_2(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (4.37)$$

erfüllen.  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$  können sich also erst für  $t > T$  unterscheiden (Abb. 4.5), weil das System nicht vorausschauen und zur Zeit  $t$  auf den Signalverlauf zu einer Zeit  $T > t$  reagieren kann. In abgekürzter Schreibweise kann dieser Sachverhalt unter Verwendung der Bezeichnung aus Gl. (4.32) durch

$$\text{Kausalität: } u_1(t) = u_2(t) \mapsto y_1(t) = y_2(t) \quad \text{für } 0 \leq t \leq T \quad (4.38)$$

beschrieben werden.



**Abb. 4.5:** Interpretation der Kausalität dynamischer Systeme

In der Differentialgleichung (4.3) äußert sich die Kausalität in der Tatsache, dass die Eingangsgröße  $u$  nicht mit höherer Ableitung als die Ausgangsgröße  $y$  erscheint, d. h., dass Gl. (4.5)

Kausalität linearer Systeme:  $q \leq n$

(4.39)

gilt. Diese Bedingung schränkt die Klasse der Differentialgleichungen der Form (4.3) auf die Klasse kausaler dynamischer Systeme ein. Wäre diese Bedingung verletzt, so müsste das System reine Differentiationen der Eingangsgröße ausführen, die, wie das folgende Beispiel zeigt, physikalisch nicht realisierbar sind.

#### Beispiel 4.4 Technische Realisierung einer Differentiation

Die über einer Induktivität gemessene Spannung ist bekanntlich proportional zur zeitlichen Ableitung des durch die Induktivität fließenden Stromes. Man kann eine Induktivität deshalb als technische Realisierung einer „reinen“ Differentiation betrachten. Sieht man sich

den Zusammenhang zwischen dem durch eine Stromquelle mit Innenwiderstand  $R$  vorgegebenen Strom  $u(t)$ <sup>1</sup> und der Spannung  $y(t)$  über der Induktivität anhand der Abb. 4.6 genauer an, so erhält man für das dort abgebildete RL-Glied  $\Sigma_{RL}$  folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} y(t) &= L \frac{di_L(t)}{dt} \\ i_L(t) &= u(t) - i_R(t) \\ i_R(t) &= \frac{1}{R} y(t). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt die Differentialgleichung

$$\Sigma_{RL} : \frac{L}{R} \dot{y}(t) + y(t) = L \dot{u}(t), \quad (4.40)$$

die offensichtlich die Kausalitätseigenschaft (4.39) erfüllt. Mit dem endlichen Widerstand  $R$  ist die Schaltung technisch realisierbar. Sie führt allerdings keine exakte Differentiation aus, sondern enthält eine Zeitverzögerung.

Die gewünschte reine Differentiation

$$y(t) = L \dot{u}(t) \quad (4.41)$$

erhält man nur unter der idealisierenden Annahme, dass der Innenwiderstand  $R$  der Stromquelle unendlich groß ist. Die exakte Differentiation ist also technisch nicht realisierbar.

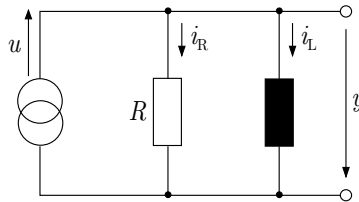


Abb. 4.6: RL-Glied zur Differentiation

Das Beispiel macht außerdem deutlich, dass in der Differentialgleichung (4.3) dynamischer Systeme auf der rechten Seite zwar Ableitungen der Eingangsgröße stehen können, innerhalb des Systems diese Ableitungen jedoch nicht durch reine Differenzierglieder tatsächlich gebildet werden. In dem in Abb. 4.6 gezeigten RL-Glied tritt nämlich nicht  $L \frac{du(t)}{dt}$ , sondern

$$y(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} = L \frac{du(t)}{dt} - \frac{L}{R} \frac{dy(t)}{dt}$$

als Signal auf. Nur unter der genannten, technisch nicht erfüllbaren Bedingung  $R \rightarrow \infty$  ist das Signal  $L \frac{du(t)}{dt}$  tatsächlich vorhanden und messbar.  $\square$

Aus den im Beispiel genannten Gründen bezeichnet man Systeme, die die Bedingung (4.39) erfüllen, als *technisch realisierbar* (oder realisierbar). Die Forderung

<sup>1</sup> Die Verwendung des Symbols  $u$  für einen Strom folgt der systemtheoretischen Sichtweise, bei der der Strom in dieser Schaltung als Eingangsgröße wirkt.

nach technischer Realisierbarkeit schränkt auch die Klasse der einsetzbaren Reglergesetze ein.

Die Realisierbarkeitsbedingung muss offensichtlich erfüllt sein, wenn der Regler durch analoge Bauelemente gerätetechnisch realisiert werden soll. Es ist jedoch ein Trugschluss anzunehmen, dass sie verletzt werden kann, wenn man den Regler mit Hilfe eines Rechners realisiert und damit nicht mehr an dieselben technischen Randbedingungen gebunden ist wie bei einer analogen Realisierung. Versucht man nämlich, ein dynamisches System (4.3) mit  $q > n$  durch einen Algorithmus zu realisieren, so muss diese Realisierung reine Differentiationen der Eingangsgröße ausführen. Für zeitgetaktete Signale, wie sie ein Rechner verarbeiten kann, müssen die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt werden, was gleichbedeutend damit ist, dass wiederum ein verzögertes an Stelle eines reinen Differenzgliedes verwendet wird. Auch hier gilt also die Realisierbarkeitsbedingung!

#### 4.2.5 Zeitinvarianz

Eine weitere Eigenschaft der hier behandelten Systeme besteht darin, dass die Koeffizienten der Differentialgleichung von der Zeit unabhängig sind. Das System ist *zeitinvariant*. Es reagiert auf eine Erregung (also einen vorgegebenen Verlauf  $u(t)$ ) unabhängig davon, wann die Erregung eintrifft. Das heißt, dass eine Verschiebung der Eingangsgröße auf der Zeitachse nach rechts eine gleichgroße Verschiebung der Ausgangsgröße bewirkt. Man spricht hierbei auch vom Verschiebeprinzip.

Bezeichnet man die Verschiebung mit  $T_t$  ( $T_t > 0$ ), so gilt in der bereits in Gl. (4.33) verwendeten Schreibweise

$$\boxed{\text{Zeitinvarianz: } u_1(t) = u_2(t - T_t) \mapsto y_1(t) = y_2(t - T_t),} \quad (4.42)$$

wobei wiederum vorausgesetzt wird, dass alle Anfangsbedingungen verschwinden.

Viele Regelungssysteme können als zeitinvariante Systeme aufgefasst werden, wenn man annimmt, dass eine Parameterdrift oder Veränderungen in der Systemstruktur entweder ganz vernachlässigt werden können oder sich so langsam vollziehen, dass sie auf das Verhalten des Regelkreises keinen Einfluss haben.

### 4.3 Zustandsraumdarstellung linearer Systeme

#### 4.3.1 Einführung des Zustandsraummodells

In der Regelungstechnik wird an Stelle von der Differentialgleichung (4.3) von einem Zustandsraummodell ausgegangen. Dieses Modell besteht aus einer Menge von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung. Wie noch gezeigt werden wird, kann es aus der Differentialgleichung (4.3) abgeleitet werden und ist somit eine äquivalente mathematische Beschreibung des Systems  $\Sigma$ .



Das Zustandsraummodell wird gegenüber der Differentialgleichung bevorzugt, weil es mit dem Systemzustand eine ingenieurtechnisch gut interpretierbare Größe beschreibt und dieser Zustand ein wichtiges Element bei der Analyse dynamischer Systeme und beim Reglerentwurf darstellt. Außerdem hat das Zustandsraummodell eine Form, die sich sehr gut für die rechnergestützte Verarbeitung eignet.

Die Aufstellung eines Zustandsraummodells soll zunächst an einem Beispiel betrachtet werden.

**Beispiel 4.5** Zustandsraummodell für einen Reihenschwingkreis

Für den Reihenschwingkreis  $\Sigma_{\text{RSK}}$  in Abb. 4.2 werden jetzt an Stelle der im Beispiel 4.1 angegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zwei Differentialgleichungen erster Ordnung abgeleitet. Die Differentialgleichungen werden so geschrieben, dass die abgeleiteten Größen auf der linken Seite stehen. Als erste Gleichung wird Gl. (4.13) übernommen:

$$\frac{di_1(t)}{dt} = \frac{1}{L}(u_1(t) - u_2(t)).$$

Die zweite Gleichung erhält man durch einmalige Differentiation der Gl. (4.15)

$$\begin{aligned} \frac{du_2(t)}{dt} &= R \frac{di_1(t)}{dt} + \frac{1}{C} i_1(t) \\ &= \frac{R}{L} u_1(t) - \frac{R}{L} u_2(t) + \frac{1}{C} i_1(t), \end{aligned}$$

wobei zur Umformung in die zweite Zeile wieder die Beziehung (4.13) verwendet wurde. Ordnet man die rechten Seiten so, dass die Summanden mit der Eingangsgröße  $u_1$  ganz rechts stehen, so kann man beide Gleichungen zu folgendem Differentialgleichungssystem zusammenfassen:

$$\begin{aligned} \frac{di_1(t)}{dt} &= -\frac{1}{L} u_2(t) + \frac{1}{L} u_1(t) \\ \frac{du_2(t)}{dt} &= \frac{1}{C} i_1(t) - \frac{R}{L} u_2(t) + \frac{R}{L} u_1(t). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann übersichtlicher dargestellt werden, wenn man den Vektor

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

eingführt und zu folgender Matrizeschreibweise übergeht:

$$\begin{pmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} u_1(t).$$

Mit dem eingeführten Zustandsvektor heißt die Gleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} u_1(t),$$

wobei die Ableitung nach der Zeit durch den Punkt über dem Vektor  $\mathbf{x}$  dargestellt wird. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Eingangsgröße  $u_1(t)$  und den Signalen  $i_1(t)$

und  $u_2(t)$  des Schwingkreises. Im Gegensatz zur Differentialgleichung (4.16) tritt hier das Signal  $i_1(t)$  auf, obwohl es weder Eingangs- noch Ausgangsgröße des Systems ist. Es erscheint in der Gleichung, weil die Form jeder einzelnen Gleichung auf eine Differentialgleichung *erster* Ordnung festgelegt wurde.

Die Ausgangsgröße  $y(t) = u_2(t)$  erhält man als zweites Element des Zustandsvektors  $\mathbf{x}(t)$ :

$$u_2(t) = (0 \quad 1) \mathbf{x}(t).$$

Zusammengefasst heißt das Modell des Schwingkreises folgendermaßen:

$$\Sigma_{\text{RSK}} : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{R}{L} \end{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) = (0 \quad 1) \mathbf{x}(t). \quad \square \end{cases} \quad (4.44)$$

Die Gleichung (4.44) kann in der allgemeinen Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t)$$

mit einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{x}$ , einer  $(n \times n)$ -Matrix  $\mathbf{A}$  und einem  $n$ -dimensionalen Vektor  $\mathbf{b}$  geschrieben werden. Im Allgemeinen ist die Ausgangsgröße eine Linearkombination der Zustandsgrößen  $x_i$  und der Eingangsgröße  $u$  und kann deshalb in der Form

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t)$$

dargestellt werden, wobei  $\mathbf{c}$  ein Vektor mit derselben Dimension wie  $\mathbf{x}$  und  $d$  ein Skalar ist.

Aus diesen Gleichungen erhält man die gebräuchliche Form des Zustandsraummodells eines linearen Systems mit einer Eingangsgröße und einer Ausgangsgröße, wenn die zeitliche Ableitung wieder durch einen Punkt über der abzuleitenden Größe symbolisiert wird:

$$\text{Zustandsraummodell : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + du(t). \end{cases} \quad (4.45)$$

Die erste Gleichung wird als *Zustandsgleichung*, die zweite als *Ausgabegleichung* bezeichnet.

$\mathbf{x}$  ist i. Allg. ein  $n$ -dimensionaler Vektor mit den zeitabhängigen Elementen  $x_i(t)$ , so dass sich der Vektor  $\dot{\mathbf{x}}$  aus den Ableitungen der einzelnen Elemente zusammensetzt:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{A}$  eine konstante  $(n \times n)$ -Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$\mathbf{b}$  ein  $n$ -dimensionaler Spaltenvektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

und  $\mathbf{c}^T$  ein  $n$ -dimensionaler Zeilenvektor mit konstanten Elementen

$$\mathbf{c}^T = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n).$$

$d$  ist ein Skalar, der bei vielen Systemen gleich null ist.  $\mathbf{A}$  wird als *Systemmatrix* bezeichnet.

Die geschweifte Klammer in Gl. (4.45) zeigt, dass das System  $\Sigma$  durch beide Gleichungen gemeinsam beschrieben wird. Wenn man mit diesem Modell arbeiten will, so muss man die Matrix  $\mathbf{A}$ , die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  sowie den Skalar  $d$  kennen. Man schreibt deshalb auch  $\Sigma = (\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  als Abkürzung für das Zustandsraummodell (4.45) des Systems  $\Sigma$ . Das Quadrupel  $(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^T, d)$  ist auch das Argument des entsprechenden MATLAB-Befehls (4.112).

$\mathbf{x}_0$  ist ein  $n$ -dimensionaler Vektor, der die Anfangsbedingungen aller Komponenten von  $\mathbf{x}$  beschreibt. Bei der Anwendung des Modells (4.45) wird i. Allg. vorausgesetzt, dass der Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  bekannt ist. Die Dimension  $n$  der Vektoren und der Matrix heißt Ordnung des Systems.

**Zustandsraummodell autonomer Systeme.** Systeme ohne Eingangsgröße bezeichnet man als autonome Systeme oder ungestörte Systeme. In ihrem Zustandsraummodell fehlen die Summanden mit  $u(t)$ :

$$\text{Autonomes System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (4.46)$$

Es wird sich zeigen, dass das Verhalten des autonomen Systems wichtige Anhaltspunkte für das Verhalten des gesteuerten Systems ( $u(t) \neq 0$ ) gibt. Beispielsweise kann die Zustandsstabilität des Systems (4.45) anhand des aus diesem System abgeleiteten autonomen Systems (4.46) untersucht werden (Abschn. 8.1).

**Zustandsraummodell gestörter Systeme.** Wenn das System  $\Sigma$  neben der Eingangsgröße  $u(t)$  eine zweite Eingangsgröße  $d(t)$  besitzt, so enthält das Zustandsraummodell zusätzliche Summanden mit diesem Signal:

$$\text{Gestörtes System : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) + \mathbf{e}d(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ y(t) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) + du(t) + fd(t). \end{cases} \quad (4.47)$$

Wenn es sich bei dem System um eine Regelstrecke handelt, bezeichnet  $u(t)$  typischerweise das Stellsignal und  $d(t)$  die Störgröße. Der durch den Faktor  $f$  dargestellte Zusammenhang zwischen der Ausgangsgröße  $y(t)$  und der zur selben Zeit anliegenden Störgröße  $d(t)$  tritt ebenso wie die über  $d$  dargestellte Abhängigkeit von  $y(t)$  von  $u(t)$  selten auf.

**Grafische Veranschaulichung des Zustandsraummodells.** Die durch Gl. (4.45) beschriebenen Zusammenhänge zwischen den Signalen  $u(t)$ ,  $x_i(t)$  und  $y(t)$  sind in der Abb. 4.7 durch ein Blockschaltbild veranschaulicht. Doppelpfeile stellen vektorielle Größen dar. Vier Blöcke sind statische Übertragungsglieder mit den Übertragungsfaktoren  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}^T$  und  $d$ . Der mittlere Block enthält  $n$  Integriatoren.

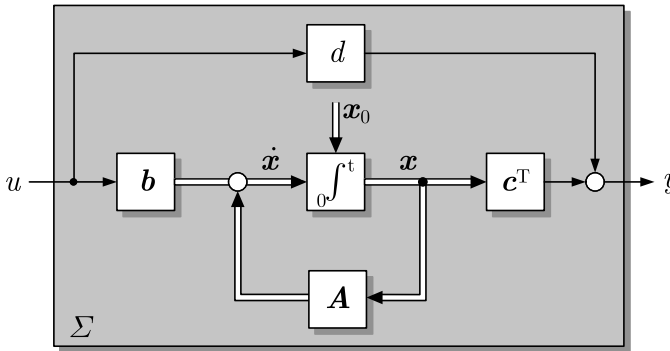


Abb. 4.7: Strukturbild des Zustandsraummodells

Eine detailliertere Darstellung als das Blockschaltbild erfolgt im Signalflussgraphen in Abb. 4.8, in dem alle Signale einzeln durch Knoten repräsentiert werden. Die gerichteten Kanten zeigen, welches Signal direkt auf welches andere Signal einwirkt. Die Elemente der Matrix  $\mathbf{A}$  bzw. der Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}^T$  sowie der Skalar  $d$  treten als Kantengewichte auf. Sind die entsprechenden Elemente gleich null, so wird keine Kante in den Signalflussgraphen eingetragen.

### 4.3.2 Zustand und Zustandsraum

Aus der Mathematik ist bekannt, dass jede lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in ein System von  $n$  Differentialgleichungen erster Ordnung überführt werden kann. Es ist deshalb stets möglich, für ein gegebenes System (4.3) ein Modell der Form (4.45) aufzustellen. Außerdem ist bekannt, dass für eine gegebene Anfangsbedingung (4.6) die Differentialgleichung (4.3) eine eindeutige Lösung hat. Dies gilt

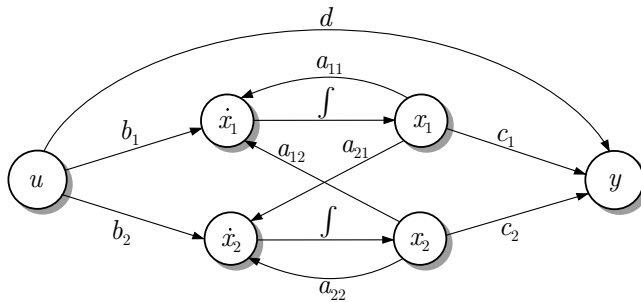


Abb. 4.8: Signalflussgraph eines Systems zweiter Ordnung

folglich auch für das Differentialgleichungssystem (4.45) mit der durch  $\mathbf{x}_0$  gegebenen Anfangsbedingung.

Das heißt, dass die in  $\mathbf{x}(0)$  enthaltenen Informationen ausreichen, um für eine beliebig gegebene Eingangsgröße  $u(t)$ ,  $t \geq 0$  die Ausgangsgröße  $y(t)$  für  $t \geq 0$  eindeutig zu berechnen.  $\mathbf{x}(0)$  beschreibt also den Zustand, in dem sich das System zum Zeitpunkt  $t = 0$  befindet. Diese Eigenschaft gilt für jeden beliebigen Zeitpunkt  $\bar{t}$ . Das heißt, wenn  $\mathbf{x}(\bar{t})$  bekannt und die Eingangsgröße  $u(t)$  für  $t \geq \bar{t}$  gegeben ist, so kann mit dem Modell (4.45) die Ausgangsgröße  $y(t)$  für den Zeitraum  $t \geq \bar{t}$  eindeutig berechnet werden.  $\mathbf{x}(t)$  heißt deshalb *Zustand* des Systems zum Zeitpunkt  $t$ .

**Definition 4.1 (Zustand eines dynamischen Systems)**

Ein Vektor  $\mathbf{x}$  wird *Zustand eines Systems* genannt, wenn für eine beliebige Zeit  $t_e \geq 0$  die Elemente  $x_i(0)$  von  $\mathbf{x}$  zum Zeitpunkt 0 zusammen mit dem Verlauf der Eingangsgröße  $u(\tau)$  für  $0 \leq \tau \leq t_e$  den Wert  $\mathbf{x}(t_e)$  und den Wert der Ausgangsgröße  $y(t_e)$  eindeutig bestimmen.  $\mathbf{x}$  heißt auch *Zustandsvektor* und die Komponenten  $x_i(t)$  von  $\mathbf{x}$  *Zustandsvariable* oder *Zustandsgrößen*.

Verschiedene physikalische Größen können als Zustandsvariablen verwendet werden. Bei elektrischen Systemen sind es in der Regel Ströme und Spannungen, bei mechanischen Systemen Winkel, Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. Dies sind physikalische Größen, die das Verhalten von Speicherelementen wie z. B. Kapazitäten, Induktivitäten, Massen oder Federn beschreiben. Wenn man diese Größen zum Zeitpunkt 0 kennt, so kann man das Systemverhalten für  $\tau > 0$  vorher sagen, wobei in die Vorhersage natürlich auch die Eingangsgröße eingeht.

Die Systemordnung  $n$  stimmt in der Regel mit der Anzahl der im System enthaltenen Speicherelemente überein. Beispielsweise haben der Reihenschwingkreis und das Feder-Masse-System aus den Beispielen 4.1 und 4.2 mit Kapazität und Induktivität bzw. Masse und Feder je zwei Speicherelemente, so dass ihre dynamische Ordnung gleich zwei ist. Es können aber auch Größen als Zustandsvariablen verwendet werden, die physikalisch nicht interpretierbar sind (vgl. Abschn. 5.3).

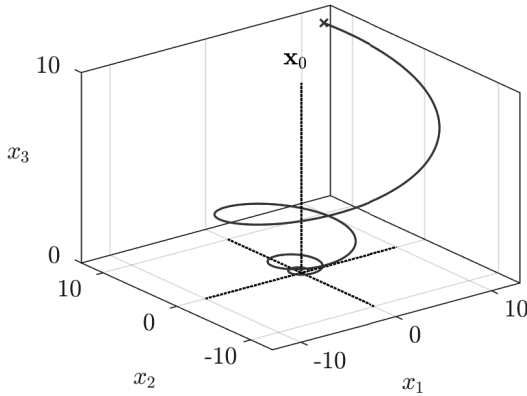


Abb. 4.9: Trajektorie eines Systems dritter Ordnung im Zustandsraum

**Zustandsraum.** Die zeitliche Abhängigkeit des  $n$ -dimensionalen Vektors  $x$  kann man sich als Bewegung eines Punktes im  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  vorstellen (Abb. 4.9).  $\mathbb{R}^n$  wird deshalb als *Zustandsraum* oder *Phasenraum* bezeichnet. Der durch die Koordinaten von  $x$  beschriebene Punkt verändert sich mit der Zeit und beschreibt eine Kurve, die *Trajektorie* oder *Zustandskurve* (Bahnkurve) des Systems heißt. Die Menge aller Trajektorien, die ein System ausgehend von allen möglichen Anfangszuständen erzeugen kann, wird *Phasenporträt* genannt.

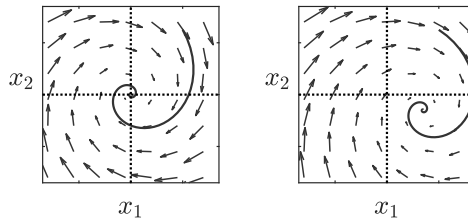


Abb. 4.10: Vektorfeld eines schwingungsfähigen Systems

Die Zustandsgleichung (4.45) beschreibt für jeden Punkt  $x$  des Zustandsraumes die zeitliche Ableitung  $\dot{x}$  der Bewegung  $x(t)$ . Hat das System keine Eingangsgröße ( $u(t) = 0$ ), so erhält man  $\dot{x}$  aus der Beziehung

$$\dot{x} = Ax.$$

Die „Geschwindigkeit“  $\dot{x}$ , mit der sich das System im Punkt  $x$  des Zustandsraumes bewegt, wird durch die Pfeile in Abb. 4.10 dargestellt, deren Betrag und Richtung sich von Punkt zu Punkt ändern. Da mit steigender Entfernung des Punktes  $x$  vom Ursprung des zweidimensionalen Zustandsraumes auch der Betrag von  $\dot{x}$  steigt, sind

die äußeren Pfeile länger als die weiter innen liegenden. Außerdem ist zu sehen, dass sich die Pfeilrichtung ändert.

Da die Gleichung  $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$  jedem Punkt  $\boldsymbol{x}$  des Raumes  $\mathbb{R}^n$  einen Vektor  $\dot{\boldsymbol{x}}$  zuordnet, spricht man bei der Funktion  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$  auch von einem Vektorfeld. Dieser in der Mathematik gebräuchliche Begriff ist für die Analyse dynamischer Systeme sehr anschaulich. Interpretiert man  $\dot{\boldsymbol{x}}$  als Strömungsfeld, so kann man sich das Verhalten eines Systems ausgehend vom Anfangszustand  $\boldsymbol{x}_0$  als Bewegung eines Partikels in diesem Strömungsfeld vorstellen. In jedem Punkt des Zustandsraumes erfährt das Partikel eine Beschleunigung, durch die seine Geschwindigkeit in Betrag und Richtung den Pfeilen entspricht. Dabei entsteht eine Trajektorie wie die in der Abbildung eingetragene Kurve.

Wirkt auf das System eine Eingangsgröße  $u(t)$ , so verändert sich das Vektorfeld

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u$$

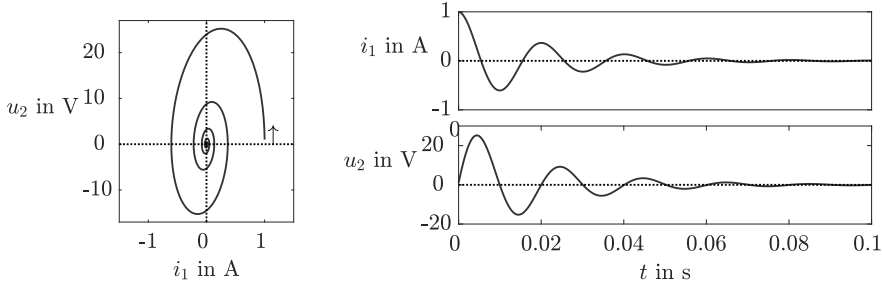
nicht nur von Ort zu Ort, sondern auch von Zeitpunkt zu Zeitpunkt. Damit ist die Kraft, die auf das Partikel einwirkt, nicht mehr nur von der Position  $\boldsymbol{x}$ , sondern auch von der Eingangsgröße  $u(t)$  abhängig. Durch die Wirkung von  $u$  wird beispielsweise das in der Abb. 4.10 links gezeigte Vektorfeld zu dem im rechten Abbildungsteil dargestellten Vektorfeld verändert. In dem Beispiel wurde mit einer konstanten Eingangsgröße  $u(t) = \bar{u}$  gerechnet, wodurch das Vektorfeld um  $\boldsymbol{b}\bar{u}$  verschoben wurde. Das System schwingt nicht mehr in den Ursprung des Zustandsraumes, sondern in den Punkt  $-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}\bar{u}$  ein, den man aus der Zustandsgleichung für  $\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$  berechnen kann.

#### Beispiel 4.6 Trajektorie eines Reihenschwingkreises

Der Reihenschwingkreis mit der Zustandsgleichung (4.44) wird für die Eingangsgröße  $u_1(t) = 0$  V und den Anfangszustand  $i_1(0) = 1$  A und  $u_2(0) = 1$  V betrachtet. Mit den Parametern  $R = 10 \Omega$ ,  $C = 100 \mu\text{F}$  und  $L = 100$  mH erhält man bei Messung des Stromes  $i_1$  in Ampere, der Spannung  $u_2$  in Volt und der Zeit in Sekunden das Modell

$$\begin{pmatrix} \frac{di_1(t)}{dt} \\ \frac{du_2(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 10000 & -100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Systemverhalten kann man sich in unterschiedlicher Weise grafisch veranschaulichen. Abbildung 4.11 zeigt rechts den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung. Diese Darstellung hat den Vorteil, dass man ablesen kann, welche Werte beide Zustandsvariablen zu bestimmten Zeitpunkten annehmen. Links ist die Trajektorie im Zustandsraum, also in der  $i_1/u_2$ -Ebene dargestellt. Dieses Bild lässt erkennen, welche Werte die Zustandsvariablen  $i_1$  und  $u_2$  gleichzeitig annehmen. Die Zeit kann jedoch nicht mehr abgelesen werden. Mit fortlaufender Zeit  $t$  bewegt sich das System vom Anfangspunkt  $(1 \ 1)^T$  auf der spiralförmigen Kurve nach innen. Dass die Zustandstrajektorie eine Spirale ist, ist typisch für schwingende Systeme.  $\square$



**Abb. 4.11:** Verlauf von Strom und Spannung des Reihenschwingkreises

### 4.3.3 Zustandsraumdarstellung von Mehrgrößensystemen

Das Modell (4.45) kann für Systeme erweitert werden, die mehr als eine Eingangsgröße  $u(t)$  und mehr als eine Ausgangsgröße  $y(t)$  besitzen. Derartige Systeme werden Mehrgrößensysteme genannt. Ihre  $m$  Eingangssignale  $u_i(t)$  und  $p$  Ausgangssignale  $y_i(t)$  werden zu den Vektoren  $\mathbf{u}(t)$  bzw.  $\mathbf{y}(t)$  zusammengefasst:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}.$$

Das Modell (4.45) hat dann die allgemeine Form

$$\text{Mehrgrößensystem : } \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \end{cases} \quad (4.48)$$

Dabei gelten folgende Bezeichnungen und Formate:

Zustandsvektor	$\mathbf{x}$	$(n \times 1)$ -Vektor
Eingangsvektor	$\mathbf{u}$	$(m \times 1)$ -Vektor
Ausgangsvektor	$\mathbf{y}$	$(p \times 1)$ -Vektor
Systemmatrix	$\mathbf{A}$	$(n \times n)$ -Matrix
Steuermatrix	$\mathbf{B}$	$(n \times m)$ -Matrix
Beobachtungsmatrix	$\mathbf{C}$	$(p \times n)$ -Matrix
Durchgangsmatrix	$\mathbf{D}$	$(p \times m)$ -Matrix

#### Beispiel 4.7 Zustandsraummodell eines Behältersystems

Das in Abb. 4.12 gezeigte Behältersystem  $\Sigma_B$  hat die beiden Ventilstellungen als Eingangsgrößen  $u_1(t)$  und  $u_2(t)$  und den Füllstand des linken Behälters sowie den Volumenstrom aus dem rechten Behälter als Ausgangsgrößen  $y_1(t)$  und  $y_2(t)$ .