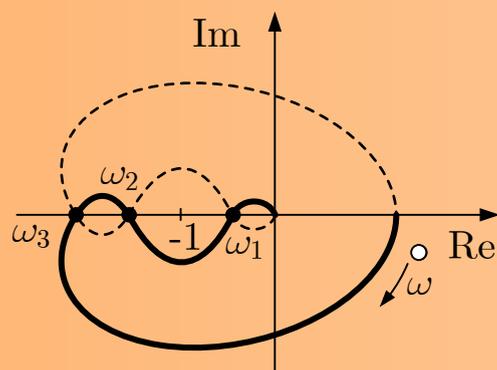


Jan Lunze

# Bemerkungen zur Interpretation des Nyquistkriteriums





# Bemerkungen zur Interpretation des Nyquistkriteriums

JAN LUNZE

[www.editionmora.de](http://www.editionmora.de)

July 28, 2021

**Zusammenfassung.** Das Nyquistkriterium stellt Bedingungen an den Verlauf der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette, unter denen der geschlossene Regelkreis E/A-stabil ist. Bei der Interpretation der Umschlingungsbedingung für den Punkt  $-1 + j0$  kann man auf die Idee kommen, dass ein Schnittpunkt von  $G_0(j\omega)$  im Intervall  $[-1, 0]$  "natürlicherweise" einer Kreisverstärkung kleiner als eins entspricht und deshalb zum Abklingen aller im Regelkreis auftretenden Schwingungen führt, während ein Schnittpunkt links vom Punkt  $-1 + j0$  das Aufklingen von Schwingungen anzeigt. Diese Interpretation ist jedoch falsch, weil die Ortskurve das Systemverhalten nur für sinusförmige Signale mit konstanter Amplitude beschreibt. Dieser Bericht zeigt ausgehend von der Selbsterregungsbedingung die richtige Interpretation des Nyquistkriteriums.



## 1 Stabilität von Regelkreisen

Es wird ein Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  betrachtet, der aus der offenen Kette

$$\Sigma_0 : Y(s) = G_0(s)U(s) \quad (1)$$

und der Rückführung

$$U(s) = W(s) - Y(s) \quad (2)$$

besteht und durch das Modell

$$\bar{\Sigma} : Y(s) = G_w(s)W(s) \quad (3)$$

mit der Übertragungsfunktion

$$G_w(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)}$$

beschrieben wird. Der Regelkreis ist E/A-stabil, wenn alle Pole  $\bar{s}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), die man als Lösungen der charakteristischen Gleichung

$$1 + G_0(s) = 0 \quad (4)$$

erhält, negativen Realteil haben:

$$\operatorname{Re}\{\bar{s}_i\} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Das Nyquistkriterium vermeidet die Berechnung der Pole  $\bar{s}_i$  und stellt anstelle dessen Bedingungen an den Verlauf der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette [1]:

### Satz 1 (Nyquistkriterium)

Eine offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  führt genau dann auf einen E/A-stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots + \infty$  den Punkt  $-1 + j0$  der komplexen Ebene  $-n^+$ -mal im Uhrzeigersinn umschließt. Dabei bezeichnet  $n^+$  die Anzahl der Pole von  $G_0(s)$  mit positivem Realteil.

Wenn also die angegebene notwendige und hinreichende Bedingung nicht erfüllt ist, ist der Regelkreis *instabil*.

Für eine stabile offene Kette  $\Sigma_0$  vereinfacht sich dieses Kriterium wie folgt:

### (Nyquistkriterium für stabile offene Kette)

Eine stabile offene Kette  $\Sigma_0$  mit der Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  führt genau dann zu einem E/A-stabilen Regelkreis  $\bar{\Sigma}$ , wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  für  $\omega = -\infty \dots + \infty$  den Punkt  $-1 + j0$  der komplexen Ebene nicht umschließt.

Wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette einen Verlauf wie im linken und im mittleren Teil von Abb. 1 hat, so ist der Regelkreis E/A-stabil. Verläuft die Ortskurve wie im rechten Teil, ist der Regelkreis instabil.

Die nachfolgenden Untersuchungen konzentrieren sich auf den Fall, dass die offene Kette stabil ist. Man kann aber für den allgemeineren Fall dieselben Überlegungen anstellen.

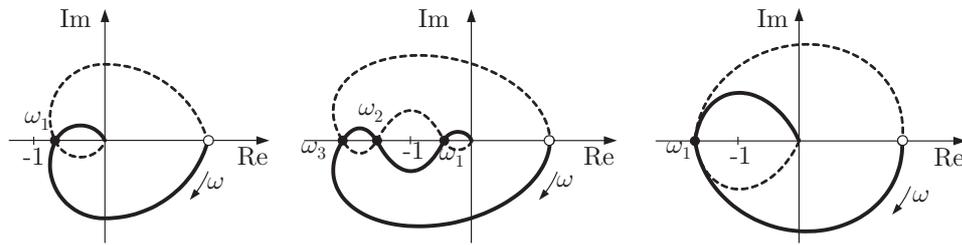


Abb. 1: Ortskurven der offenen Kette

## 2 Interpretation des Nyquistkriteriums

### 2.1 Selbsterregungsbedingung

Die charakteristische Gleichung (4) wird häufig als Selbsterregungsbedingung von BARKHAUSEN interpretiert. Für diese Interpretation öffnet man den Regelkreis für  $w(t) = 0$  und speist mit einem Signalgenerator eine Sinusfunktion

$$y'(t) = \sin \omega t \tag{6}$$

ein (Abb. 2). Dabei entsteht als stationärer Anteil  $y_s(t)$  der Ausgangsgröße  $y(t)$  das Signal

$$y_s(t) = -|G_0(j\omega)| \sin(\omega t + \arg G_0(j\omega)) \tag{7}$$

(vgl. [1], Gl. (6.69)), also die um den Faktor  $-|G_0(j\omega)|$  verstärkte und um  $\arg G_0(j\omega)$  auf der Zeitachse verschobene Eingangsgröße. Wenn dieses Signal mit dem Eingangssignal  $y'(t)$  übereinstimmt

Selbsterregungsbedingung:  $y_s(t) = y'(t), \quad t \geq 0,$

(8)

dann entsteht dasselbe Systemverhalten, wenn man den Signalgenerator weglässt und statt dessen das Ausgangssignal  $y(t)$  zum Eingang  $y'(t)$  der offenen Kette zurückführt.

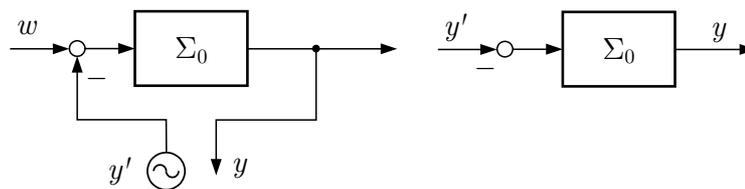


Abb. 2: Interpretation der Selbsterregungsbedingung von BARKHAUSEN

Die Situation (8) ist für sinusförmige Signale genau dann erfüllt, wenn die Beziehung

$$G_0(j\omega) = -1 \tag{9}$$

gilt, die mit der charakteristischen Gleichung (4) für  $s = j\omega$  übereinstimmt. Unter der Bedingung (9) erregt sich ein sinusförmiges Signal

$$y_s(t) = \bar{y} \sin(\omega t + \phi_y) \tag{10}$$

selbst, d. h., Signale der Form (10) treten als Eigenbewegung des Regelkreises auf.

Wenn für eine Frequenz  $\omega$  für die offene Kette  $\Sigma_0$  die Bedingung (9) erfüllt ist, so reagiert der Regelkreis  $\bar{\Sigma}$  nach dem Abklingen des Übergangsverhaltens auf eine Erregung mit einem Ausgangssignal der Form (10).

Sollte die Bedingung (9) für mehrere Frequenzen erfüllt sein, so besteht das Ausgangssignal aus der Überlagerung mehrerer Sinusschwingungen der entsprechenden Frequenzen. Die Amplitude  $\bar{y}$  und die Phasenverschiebung  $\phi_y$  des stationären Verhaltens (10) hängen von der Erregung des Regelkreises ab.

## 2.2 Falsche Interpretation der Selbsterregungsbedingung

Die Selbsterregungsbedingung ist für sinusförmige Signale genau dann erfüllt, wenn die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette wie in Abb. 3 die reelle Achse der komplexen Ebene im Punkt  $-1 + j0$  schneidet. Die Frequenz im Schnittpunkt sei  $\omega_1$ . Wird eine Sinusschwingung mit dieser Frequenz  $\omega_1$  in die offene Kette  $-G_0(j\omega)$  eingespeist, so entsteht dieselbe Sinusschwingung am Ausgang der offenen Kette. Sinusschwingungen mit dieser Frequenz sind deshalb auch Eigenbewegungen des Regelkreises.

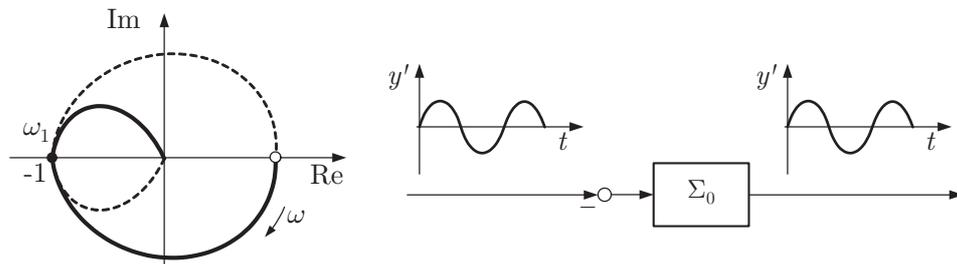


Abb. 3: Sinusfunktion, die die Selbsterregungsbedingung erfüllt

Diese korrekte Interpretation der Selbsterregungsbedingung wird nun aber fälschlicherweise erweitert, um die Forderungen des Nyquistkriteriums plausibel zu machen. Dabei werden nicht nur Ortskurven betrachtet, die den Punkt  $-1 + j0$  enthalten, sondern auch solche, die die reelle Achse rechts oder links von diesem Punkt schneiden.

Entsprechend dem Nyquistkriterium führt eine offene Kette, deren Ortskurve wie im linken Teil von Abb. 1 den Punkt  $-1 + j0$  nicht umschlingt, zu einem E/A-stabilen Regelkreis. Diese Tatsache erscheint plausibel, weil zum Schnittpunkt der Ortskurve mit der reellen Achse bei der Frequenz  $\omega_1$  eine Amplitude  $|G_0(j\omega_1)| < 1$  gehört. Man stellt sich vor, dass jedes sinusförmige Signal mit der Frequenz  $\omega_1$  beim Durchlaufen der offenen Kette in seiner Amplitude abgeschwächt wird und folglich im Regelkreis ein sinusförmiges Signal mit dieser Frequenz eine abnehmende Amplitude haben muss, so dass man es in der Form

$$y_s(t) = \bar{y} e^{\delta t} \sin(\omega_1 t + \phi_y) \quad (11)$$

mit  $\delta < 0$  schreiben kann. Der Regelkreis ist folglich E/A-stabil, weil die sich im Regelkreis selbst erregende Sinusschwingung abklingt.

Diese Interpretation führt auch bei der Ortskurve im rechten Teil von Abb. 1 scheinbar zum richtigen Ergebnis. Die dort gezeigte Ortskurve verletzt die Bedingung des Nyquistkriteriums, weil sie den Punkt  $-1 + j0$  umschlingt. Die Instabilität des Regelkreises erscheint plausibel, weil jetzt die Amplitude  $|G_0(j\omega_1)|$  größer als 1 ist, die Sinusschwingung mit der Frequenz  $\omega_1$  also verstärkt wird und der Regelkreis folglich eine aufklingende Sinusfunktion als Eigenbewegung hat (Gl. (11) mit  $\delta > 0$ ).

Diese Plausibilitätsklärungen für die Aussage des Nyquistkriteriums lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

Aus dem Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  einer stabilen offenen Kette wird die Frequenz  $\omega_1$  bestimmt, für die die Ortskurve die Phasenverschiebung von  $-180^\circ$  hat.

- (i) Gilt  $|G_0(j\omega_1)| < 1$ , so werden Sinusschwingungen mit der Frequenz  $\omega_1$  gedämpft und der Regelkreis ist folglich E/A-stabil.
- (ii) Gilt  $|G_0(j\omega_1)| > 1$ , so werden Sinusschwingungen mit der Frequenz  $\omega_1$  verstärkt und der Regelkreis ist demzufolge instabil.

Im ersten Fall antwortet der Regelkreis auf eine kurzzeitige Erregung – nach dem Abklingen des Übergangsverhaltens – mit einer abklingenden Sinusschwingung, im zweiten Fall mit einer aufklingenden Sinusschwingung.

Diese Regeln erscheinen plausibel und werden häufig als Erklärung für den Inhalt des Nyquistkriteriums für stabile offene Ketten verwendet. **Sie sind jedoch falsch!**

Dass an dieser Erklärung etwas nicht stimmen kann, erkennt man bei Betrachtung der in der Mitte von Abb. 1 gezeigten Ortskurve. Hier treten mehrere Schnittfrequenzen auf, von denen zwei auf die “Verstärkungsfaktoren”  $|G_0(j\omega_2)|$  bzw.  $|G_0(j\omega_3)|$  führen, die größer als eins sind und die deshalb einen instabilen Regelkreis anzeigen müssten. Allerdings ist der Regelkreis entsprechend dem Nyquistkriterium für den gezeigten Verlauf der Ortskurve der offenen Kette E/A-stabil.

### 2.3 Aufklärung des Trugschlusses

Beide der oben angegebenen Interpretationen des Nyquistkriteriums sind falsch, wie die folgende Erläuterung zeigt.

Der Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette beschreibt für jede einzelne Frequenz  $\omega$  die Übertragungseigenschaft der offenen Kette für sinusförmige Eingangssignale (6) mit der entsprechenden Frequenz  $\omega$ . Aus der Amplitude  $|G_0(j\omega)|$  für einen einzelnen Frequenzwert  $\omega$  kann deshalb weder für die offene Kette noch für den geschlossenen Regelkreis etwas über das Vorhandensein von aufklingenden oder abklingenden Sinusschwingungen ausgesagt werden. Beide angegebenen Erläuterungen des Nyquistkriteriums sind deshalb falsch, also sowohl die in der Regel (ii) angegebene Erklärung für ein instabiles Verhalten des Regelkreises als auch die Erklärung (i), weshalb der Regelkreis E/A-stabil ist, wenn die Verstärkung kleiner als eins ist. Das Nyquistkriterium bezieht sich nicht auf einzelne Punkte der Ortskurve, sondern auf den gesamten *Verlauf* der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  im Frequenzbereich  $\omega = -\infty \dots + \infty$ .

Aus der Ortskurve der offenen Kette kann man nur dann etwas über konkrete Signale im Regelkreis aussagen, wenn die Selbsterregungsbedingung (8) für ein sinusförmiges Signal

(mit konstanter Amplitude) erfüllt ist und folglich Gl. (9) gilt. Ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz  $\omega$ , die durch Gl. (9) festgelegt ist, erregt sich selbst und bleibt dabei ein sinusförmiges Signal mit konstanter Amplitude. Der Regelkreis reagiert also für große Zeit  $t$  mit dem stationären Verhalten (10), wobei es von der Erregung abhängt, für welche Amplitude  $\bar{y}$  und Phase  $\phi_y$  diese Gleichung gilt.

**Fazit.** Das Nyquistkriterium leitet aus dem Verlauf der Ortskurve der offenen Kette eine Aussage über die Stabilität des Regelkreises ab, die nicht auf die Betrachtung einzelner Punkte der Ortskurve reduziert werden kann.

### 3 Erweiterungen und Beispiele

Die Selbsterregungsbedingung (8) gilt nicht nur für sinusförmige, sondern für beliebige Signale und kann deshalb in den Frequenzbereich transformiert werden:

$$\boxed{\text{Selbsterregungsbedingung: } Y(s) = Y'(s).} \quad (12)$$

Anstelle von Gl. (9) entsteht dann die Gleichung

$$G_0(s) = -1, \quad (13)$$

deren Lösungen die Frequenzen  $\bar{s}_i = \delta_i + j\omega_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) angeben, für die die Selbsterregungsbedingung erfüllt ist. Der Regelkreis hat dann das stationäre Verhalten

$$y_s(t) = \bar{y} e^{\delta_i t} \sin(\omega_i t + \arg G_0(\delta_i + j\omega_i)),$$

dessen Eigenschaften durch die Pole  $\bar{s}_i$  des geschlossenen Kreises bestimmt werden. Wenn für eine Frequenz  $\bar{s}_i = \delta_i + j\omega_i$  mit positivem Realteil  $\delta_i$  die Selbsterregungsbedingung erfüllt ist, ist der Regelkreis instabil. Gilt die Selbsterregungsbedingung nur für Frequenzen mit negativem Realteil, so ist der Regelkreis E/A-stabil.

Wenn man aus Ortskurven der offenen Kette die Pole des geschlossenen Kreises bestimmen will, muss man die Schar aller Ortskurven  $G(\delta + j\omega)$  mit  $\delta = -\infty \dots + \infty$  betrachten und alle Schnittpunkte dieser Ortskurven mit dem Punkt  $-1 + j0$  herausuchen. Die zu diesen Werten von  $\delta + j\omega$  gehörenden Signale sind aufklingende ( $\delta > 0$ ) oder abklingende ( $\delta < 0$ ) Sinusschwingungen, die als Eigenbewegung des Regelkreises auftreten. Das folgende Beispiel zeigt diese Vorgehensweise.

#### Beispiel 1 Instabiler Regelkreis

Es wird die offene Kette

$$G_0(s) = \frac{k_P k_S}{(T_1^2 s^2 + 2dT_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (14)$$

mit den Parametern

$$k_P = 1, \quad k_S = 200, \quad T_1 = 0,1, \quad d = 1, \quad T_2 = 0,01 \quad (15)$$

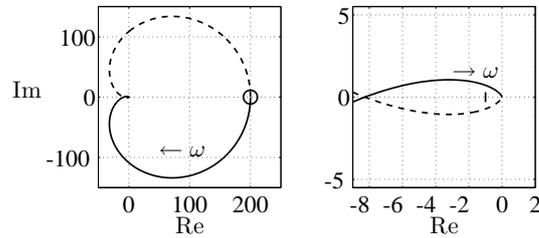


Abb. 4: Ortskurve der offenen Kette (14), (15)

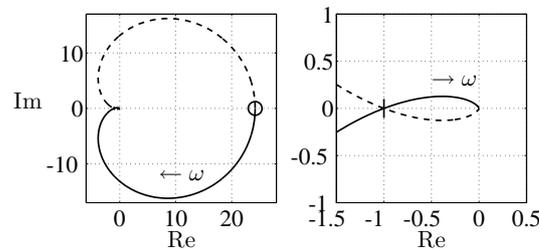


Abb. 5: Ortskurve der offenen Kette, die den Punkt  $-1 + j0$  schneidet

betrachtet, deren Ortskurve den Punkt  $-1 + j0$  umschlingt (Abb. 4). Folglich ist der Regelkreis instabil.

Wenn man die Reglerverstärkung  $k_P$  verkleinert, so dass die Ortskurve die reelle Achse im Punkt  $-1 + j0$  schneidet, so ist die Selbsterregungsbedingung (8) erfüllt und der Regelkreis hat eine sinusförmige Eigenbewegung. Um diesen Schnittpunkt zu erzeugen, muss man für die hier verwendeten Streckenparameter die Reglerverstärkung auf

$$k_P = 0,121 \tag{16}$$

festlegen (berechnet mit dem Hurwitzkriterium). Dafür hat der Regelkreis die Pole

$$\bar{s}_1 = -120 \quad \text{und} \quad \bar{s}_{2/3} = \pm j45,83.$$

Die Ortskurve  $G_0(j\omega)$  der offenen Kette schneidet also die reelle Achse für die Frequenzen  $\omega = \pm j45,83$  im Punkt  $-1 + j0$  (Abb. 5).

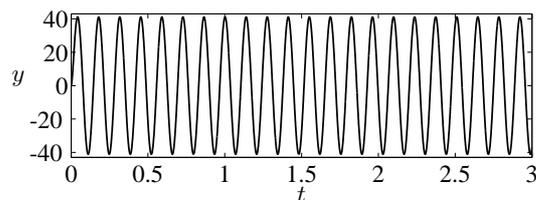


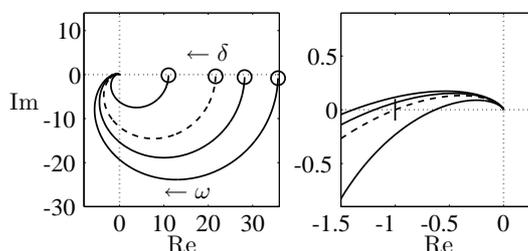
Abb. 6: Verhalten des Regelkreises mit der Reglerverstärkung nach Gl. (16)

Regt man den Regelkreis durch eine impulsförmige Führungsgröße  $w(t) = \delta(t)$  an, so schwingt er nach dem Abklingen des Übergangsverhaltens mit der Sinusfunktion

$$y_s(t) = \bar{y} \sin(45,83 t + \phi_y),$$

wie Abb. 6 zeigt. Dabei hängen die Werte von  $\bar{y}$  und  $\phi_y$  von der Erregung ab.

Für die offene Kette (14), (15) entsteht im zugehörigen Regelkreis keine sinusförmige Eigenbewegung und der Schnittpunkt der Ortskurve  $G_0(j\omega)$  mit der reellen Achse etwa beim Punkt  $-8 + j0$  in Abb. 4 sagt nichts über die Eigenvorgänge des Regelkreises aus. Derartige Aussagen kann man nur aus Kurven ablesen, die den Punkte  $-1 + j0$  schneiden und folglich die Selbsterregungsbedingung erfüllen. Dafür werden Ortskurven von  $G_0(\delta + j\omega)$  für  $\omega = 0 \dots + \infty$  für unterschiedliche Werte von  $\delta$  aufgezeichnet (Abb. 7).



**Abb. 7:** Ortskurven von  $G_0(\delta + j\omega)$

Die Abbildung zeigt die Ortskurven von  $G_0(\delta + j\omega)$  für

$$k_P = 0,15 \quad (17)$$

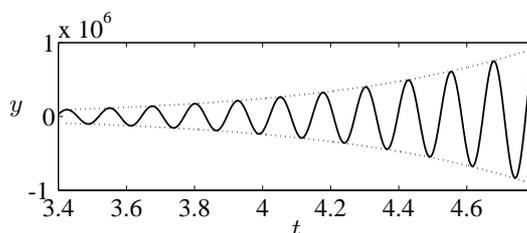
mit

$$\delta \in \{-0,8, 0,3, 1,675, 6\},$$

wobei der gesuchte Schnitt mit dem Punkt  $-1 + j0$  bei der Ortskurve für  $\delta = 1,675$  auftritt und zwar bei der Frequenz  $\omega = 50,1$  (gestrichelte Kurven). Dementsprechend antwortet der geschlossene Kreis auf eine impulsförmige Erregung mit einer Eigenbewegung der Form

$$y_s(t) = \bar{y} e^{1,675t} \sin(50,1 t + \phi_y),$$

wobei die Werte von  $\bar{y}$  und  $\phi_y$  wieder von der Erregung abhängen (Abb. 8). Die gestrichelte Kurve zeigt das Aufklingen der Amplitude der Systemantwort entsprechend der e-Funktion  $e^{1,675t}$ .



**Abb. 8:** Ausschnitt aus dem Verhalten des Regelkreises mit der Reglerverstärkung (17)

Wie das Beispiel zeigt, kann man die Frequenzen der Eigenbewegung des Regelkreises aus Schnittpunkten von  $G_0(s)$  mit der reellen Achse im Punkt  $-1 + j0$  bestimmen, aber dafür reicht

es nicht, den Frequenzgang  $G_0(j\omega)$  zu betrachten, sondern man muss die Schar aller Ortskurven  $G_0(\delta + j\omega)$  für  $\delta = -\infty \dots +\infty$  untersuchen. Eine Aussage über das Regelkreisverhalten ist immer nur für Frequenzen  $\delta + j\omega$  möglich, für die die Übertragungsfunktion  $G_0(s)$  der offenen Kette die Selbsterregungsbedingung (13) erfüllt.  $\square$

## Literatur

- [1] Lunze, J.: *Regelungstechnik. Band 1*, Springer-Verlag, Heidelberg 2020 (12. Aufl.).