

7

Aussagenlogik

Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Grundlagen der mathematischen Logik und zeigt mit dem Resolutionskalkül der Aussagenlogik eine Beweismethode, die sich rechen-technisch einfach implementieren lässt. Als wichtiges Anwendungsgebiet wird die Verifikation von Steuerungen behandelt.

7.1 Einführung in die logikbasierte Wissensverarbeitung

Ein wichtiges Merkmal menschlicher Intelligenz ist die Fähigkeit, neues Wissen aus bekannten Tatsachen durch logische Schlüsse abzuleiten. Logikbasierte Wissensverarbeitungssysteme sollen die dabei verwendeten Schlussweisen nachvollziehen. Sie werden auch als Inferenzsysteme im engeren Sinne bezeichnet.

Die Erweiterung der regelbasierten auf die logikbasierte Wissensverarbeitung ist notwendig, um allgemeingültige Aussagen darstellen und verarbeiten zu können. Die im Kap. 4 behandelten Regeln konnten nur auf konkrete Objekte, z. B. die Widerstände R_1 und R_2 , angewendet werden. Es war zwar möglich, die Regeln für die Zusammenfassung einer Reihen- oder Parallelschaltung für beliebige Widerstände X und Y zu formulieren. Für die Anwendung der Regeln mussten X und Y aber mit Widerstandsnamen belegt sein. Demgegenüber erlaubt es die logikbasierte Wissensverarbeitung, Variablen für Objekte einzuführen und die mit diesen Variablen formulierten allgemeingültigen Aussagen zu verarbeiten.

Die folgenden Beispiele verdeutlichen die Notwendigkeit derartiger Variabler:

- Es soll etwas über eine Eigenschaft ausgesagt werden, ohne die Dinge, die diese Eigenschaft besitzen, genau zu benennen: Wenn beliebige Widerstände X und Y sowie Y und

Z in Reihe liegen, so bilden diese Widerstände X , Y und Z eine aus drei Widerständen bestehende Reihenschaltung.

- Es soll etwas über die Eigenschaften von Dingen ausgesagt werden, von denen bekannt ist, dass sie eine andere Eigenschaft besitzen: Wenn X ein linearer Widerstand ist, Y der durch ihn fließende Strom und Z die über ihm abfallende Spannung, so sind Y und Z proportional (Ohmsches Gesetz).
- Es soll ausgesagt werden, dass eine von mehreren möglichen Eigenschaften zutrifft: In einer Reihen-Parallelschaltung von Widerständen liegen zwei Widerstände X und Y entweder in Reihe, sind parallel geschaltet oder können nicht zusammengefasst werden.
- Es soll ausgesagt werden, dass eine Aussage nicht zutrifft: In einer Reihen-Parallelschaltung gibt es keinen Widerstand X , dessen Anschlüsse beide am selben Knoten angeschlossen sind.

Die Grundlagen der logikbasierten Wissensverarbeitung werden in diesem und dem nachfolgenden Kapitel erläutert. Dieses Kapitel gibt eine Einführung in die Aussagenlogik und beschreibt mit der Resolutionsregel den grundlegenden Verarbeitungsschritt logischer Ausdrücke. Dabei werden noch keine Variablen eingeführt. Dies geschieht im Kapitel 8, in dem die hier erläuterten Beweismethoden auf prädikatenlogische Ausdrücke mit Variablen erweitert werden.

7.2 Grundlagen der Aussagenlogik

7.2.1 Aussagen und logische Ausdrücke

Die Aussagenlogik untersucht den Wahrheitswert zusammengesetzter Aussagen in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Einzelaussagen. Unter einer *Aussage* wird ein Satz verstanden, der eine Behauptung über Objekte und deren Beziehungen ausdrückt und der den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ haben kann.

Beispiel 7.1 Beschreibung eines Parkplatzes

Als begleitendes Beispiel für die Einführung in die Aussagenlogik soll der in Abb. 7.1 gezeigte Parkplatz betrachtet werden. Unabhängig von der Fahrzeugbelegung können folgende Aussagen gemacht werden:



Abb. 7.1: Parkplatz mit vier Stellplätzen

$$a = \text{„Der Stellplatz A ist frei.“} \quad (7.1)$$

$$b = \text{„Der Stellplatz B ist frei.“} \quad (7.2)$$

$$c = \text{„Der Stellplatz C ist frei.“} \quad (7.3)$$

$$d = \text{„Der Stellplatz D ist frei.“} \quad (7.4)$$

$$z = \text{„Es sind zwei Stellplätze frei.“} \quad (7.5)$$

$$o = \text{„Der Parkplatz ist vollständig besetzt.“} \quad (7.6)$$

Für die in der Abbildung gezeigte Situation sind offenbar die ersten fünf Aussagen wahr und die letzte Aussage falsch. Auf den Wahrheitswert kommt es aber zunächst gar nicht an. Wichtig ist, dass die auf der rechten Seite stehenden Beschreibungen einen Sachverhalt darstellen, der durch die auf der linken Seite angegebenen Symbole repräsentiert wird. Jede Zeile stellt eine Aussage dar, denn die durch den entsprechenden Satz ausgedrückte Behauptung kann den Wahrheitswert „wahr“ oder „falsch“ haben. \square

Aussagen bilden die Atome, also die nicht weiter zerlegbaren Bestandteile logischer Ausdrücke. Man bezeichnet sie auch als Primformeln.

Es wird sich im Weiteren schnell zeigen, dass es bei der logischen Verarbeitung nicht auf den Inhalt der Aussagen ankommt, sondern nur auf deren Wahrheitswert. An Stelle der in den Beispielen rechts stehenden Sätze werden im Folgenden deshalb nur die auf der linken Seite stehenden *Aussagesymbole* betrachtet, die die rechts stehenden Aussagen repräsentieren. Die Verwendung dieser Symbole zeigt sehr deutlich, dass man bei der logischen Verarbeitung vollkommen vom Inhalt der Aussagen abstrahiert.

Die Menge aller bei einem bestimmten Problem verwendeten Aussagesymbole wird mit Σ bezeichnet. Ihre Elemente werden typischerweise durch kleine Buchstaben dargestellt. Da man das Verarbeitungsergebnis aber natürlich wieder in der realen Welt interpretieren will, kann man an Stelle der hier verwendeten Buchstaben für die Aussagesymbole auch Buchstabenfolgen einführen, mit Hilfe deren man sich an die Bedeutung der Aussage erinnert, z. B.

$$A_{frei} = \text{„Der Stellplatz A ist frei.“}$$

$$PlatzVoll = \text{„Der Parkplatz ist vollständig besetzt.“}$$

Wahrheitswert. Nach dem Prinzip der Zweiwertigkeit wird jeder Aussage genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ (true, T, 1) oder „falsch“ (false, F, 0) zugeordnet. Es gibt also keine Aussage, die gleichzeitig wahr und falsch ist (Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch), noch gibt es Aussagen, die keinen dieser beiden Wahrheitswerte haben (Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten):

|| Eine Aussage ist ein Satz, der wahr oder falsch ist.

Dies bedeutet jedoch nicht, dass man den Wahrheitswert jeder Aussage kennt. Im Gegenteil, die Logik beschäftigt sich hauptsächlich mit der Frage, wie man anfänglich unbekannte Wahrheitswerte von Aussagen und von den mit diesen Aussagen gebildeten logischen Ausdrücken ermitteln kann.

Die Zuordnung des Wahrheitswertes zu Aussagen heißt *Belegung*, Bewertung oder Interpretation. Sie wird durch eine Funktion

$$B : \Sigma \rightarrow \{T, F\}$$

ausgedrückt, die jedem Aussagesymbol den Wahrheitswert T oder F zuordnet. So heißt

$$B(a) = T, \quad B(z) = F,$$

dass die Aussage a wahr und die Aussage z falsch ist.

Logische Ausdrücke. Aussagesymbole werden durch die Junktoren (Verknüpfungsoperatoren)

- \wedge UND (konjunktive Verknüpfung, Konjunktion)
- \vee ODER (disjunktive Verknüpfung, Disjunktion)
- \neg NICHT (Negation)

verknüpft. $\neg A$ wird als das Komplement von A bezeichnet¹. Als Abkürzung bestimmter durch \wedge , \vee und \neg konstruierbarer Aussageverbindungen werden weitere Junktoren eingeführt, von denen die folgenden häufig verwendet werden:

- \Rightarrow IMPLIZIERT (Implikation)
- \Leftrightarrow IST ÄQUIVALENT ZU (Äquivalenz).

Definition 7.1 (Logischer Ausdruck)

Unter einem logischen Ausdruck wird eine Verknüpfung von Aussagen verstanden, die nach folgenden Regeln entstanden ist:

- Ist $p \in \Sigma$ ein Aussagesymbol, dann ist p ein logischer Ausdruck.
- Ist p ein logischer Ausdruck, so ist $(\neg p)$ ein logischer Ausdruck.
- Sind p und q logische Ausdrücke, so sind $(p \vee q)$, $(p \wedge q)$, $(p \Rightarrow q)$ und $(p \Leftrightarrow q)$ logische Ausdrücke.

Außer dem Begriff „logischer Ausdruck“ sind auch die Bezeichnungen Formel, wohlgeformte Formel (*well-formed formula (wff)*) oder Satz gebräuchlich.

Um Klammern in logischen Ausdrücken zu vermeiden, wird vereinbart, dass die Prioritäten der Operationen beginnend mit der höchsten Priorität wie folgt geordnet sind: \neg , \wedge , \vee , \Rightarrow , \Leftrightarrow . Das heißt, die Ausdrücke

$$((\neg(a \wedge b)) \Rightarrow (c \wedge d)) \quad \text{und} \quad (((a \wedge b) \vee c) \vee (\neg d)) \Leftrightarrow e$$

besagen dasselbe wie

$$\neg(a \wedge b) \Rightarrow c \wedge d \quad \text{und} \quad a \wedge b \vee c \vee \neg d \Leftrightarrow e.$$

¹ Die in Großbuchstaben gesetzten Werte zeigen, wie die Junktoren ausgesprochen werden.

Beispiel 7.1 (Forts.) Beschreibung eines Parkplatzes

Aus den in Gln. (7.1) – (7.6) eingeführten Aussagesymbolen können z. B. folgende logische Ausdrücke gebildet werden:

- $a \wedge c \Rightarrow z$ Die Aussagen „Der Stellplatz A ist frei.“ UND „Der Stellplatz C ist frei.“ IMPLIZIEREN die Aussage „Es sind zwei Stellplätze frei.“
- $\neg(a \wedge b \wedge c \wedge d) \Rightarrow o$ Die Verneinung der Konjunktion „Der Stellplatz A ist frei.“ UND „Der Stellplatz B ist frei.“ UND „Der Stellplatz C ist frei.“ UND „Der Stellplatz D ist frei.“ IMPLIZIERT die Aussage „Der Parkplatz ist vollständig besetzt.“
- $\neg a \wedge \neg b \Rightarrow z$ Die Verneinung der Aussage „Der Stellplatz A ist frei.“ UND die Verneinung der Aussage „Der Stellplatz B ist frei.“ IMPLIZIEREN die Aussage „Es sind zwei Stellplätze frei.“

Durch die drei o. a. Regeln ist nur vorgeschrieben, *wie* Ausdrücke gebildet werden können. Unberührt bleibt die Frage, ob die erhaltenen Ausdrücke inhaltlich wahr oder falsch sind. Für den Parkplatz geht aus der angegebenen Bedeutung der Formeln hervor, dass die ersten beiden Ausdrücke wahr sind, während der dritte Ausdruck falsch ist. \square

Bedeutung der Junktoren. Die Wirkung der Junktoren auf den Wahrheitswert der Ausdrücke ist durch die folgende Wahrheitstafel definiert. In ihr stehen p und q für aussagenlogische Ausdrücke. Die Wahrheitstafel gibt an, in welcher Weise der Wahrheitswert eines Ausdrucks von den Wahrheitswerten seiner Elemente p und q abhängt. Dabei wird das Symbol B über die bisherige Bedeutung hinaus auch zur Kennzeichnung des Wahrheitswertes von Ausdrücken verwendet:

$B(p)$	$B(q)$	$B(p \wedge q)$	$B(p \vee q)$	$B(\neg p)$	$B(p \Rightarrow q)$	$B(p \Leftrightarrow q)$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T	T

(7.7)

Die Tabelle zeigt, dass der Wahrheitswert eines Ausdrucks von den Wahrheitswerten der verknüpften Elemente abhängig ist und wie er bei Kenntnis von deren Wahrheitswerten gebildet werden kann. Man beachte, dass der Wahrheitswert der Implikation ($p \Rightarrow q$) – im Gegensatz zum umgangssprachlichen Gebrauch des Wortes „bewirkt“ – auf T festgelegt ist, wenn p falsch und q wahr ist. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist diese Definition sinnvoll.

Beispiel 7.1 (Forts.) Beschreibung eines Parkplatzes

Bei der Beschreibung des Parkplatzes gilt die Implikation

$$(a \wedge b) \Rightarrow z,$$

die besagt, dass zwei Stellplätze frei sind, wenn die Stellplätze A und B frei sind. Das heißt, es gilt

$$B((a \wedge b) \Rightarrow z) = T,$$

so dass für diese Implikation eine Situation entsprechend der ersten, dritten und vierten Zeile der Wahrheitstafel auftreten kann. Die erste Zeile mit $p = a \wedge b$ und $q = z$ entspricht der Situation, an die man als erstes denkt: Die Aussagen a und b sind gemeinsam wahr, also die Stellplätze A und B frei, und dann ist auch die Aussage z wahr, denn es sind unter dieser Voraussetzung zwei Stellplätze frei. Die dritte und vierte Zeile betreffen die Situation, dass der Ausdruck $a \wedge b$ nicht wahr ist, also die Stellplätze A und B nicht gemeinsam frei sind. Dann kann die Aussage z sowohl wahr als auch falsch sein, ohne dass die Implikation den Wahrheitswert T verliert. Dies ist inhaltlich richtig, denn ob zwei Stellplätze frei sind oder nicht, hängt nicht nur von der Belegung der Stellplätze A und B des Parkplatzes ab. Wenn die Stellplätze C und D belegt sind, gilt $B(z) = F$, andernfalls $B(z) = T$. Die Gültigkeit der Implikation lässt beide Möglichkeiten offen.

Das Beispiel zeigt auch, wie man vorgehen muss, wenn der Parkplatz nur die beiden Stellplätze A und B besitzt und folglich die Situation der dritten Zeile der Wahrheitstafel gar nicht auftreten kann. Dann muss man bei einer genauen Beschreibung der Parkplatznutzung nicht aufschreiben, dass die zwei freien Plätze A und B bewirken, dass zwei Stellplätze frei sind, sondern dass *genau dann* zwei Stellplätze frei sind, wenn die Plätze A und B nicht belegt sind. Dies wird durch die Äquivalenz

$$(a \wedge b) \Leftrightarrow z$$

ausgedrückt, deren Gültigkeit nur die erste und vierte Zeile der Wahrheitstafel zulässt. \square

Die Wahrheitstafel zeigt außerdem, dass die Junktoren \wedge und \vee kommutativ, assoziativ und idempotent sind. Das heißt, es gilt beispielsweise

$$\begin{array}{ll} a \wedge b = b \wedge a & \text{Kommutativität} \\ a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c & \text{Assoziativität} \\ a \wedge a = a & \text{Idempotenz.} \end{array}$$

Innerhalb von Konjunktionen und Disjunktionen kommt es also nicht auf die Reihenfolge der Aussagesymbole an und mehrfach auftretende Symbole können entfernt werden.

In der Literatur werden in der obersten Zeile der Wahrheitstafel häufig die Aussagesymbole ohne dem „B“ für Belegung angeführt. Es soll hier jedoch stets darauf hingewiesen werden, dass in der Tabelle nicht der Inhalt der Aussagesymbole, sondern deren Wahrheitswert steht. Bei der booleschen Algebra ist dies anders. Dort stehen die Symbole für binäre Variablen, deren Wert in der Wahrheitstafel aufgeführt ist. Dort gibt die Tabelle tatsächlich Gleichungen an wie beispielsweise $p = T$, während der entsprechende Eintrag hier als $B(p) = T$ zu lesen ist. Was eine Gleichheit von aussagenlogischen Ausdrücken bedeutet, wird im Abschn. 7.2.3 behandelt.

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass alles, was über den betrachteten Gegenstandsbereich bekannt ist, in einer gültigen Formel f aufgeschrieben wurde. Das heißt erstens, dass alle gleichzeitig geltenden Ausdrücke konjunktiv in einer einzigen Formel zusammengefasst sind. Zweitens heißt dies, dass die Ausdrücke so formuliert wurden, dass die Formel f wahr ist ($B(f) = T$), was man gegebenenfalls durch eine Negation falscher Ausdrücke erreichen kann.

7.2.2 Semantik logischer Ausdrücke

Die aussagenlogischen Ausdrücke wurden im vorangegangenen Abschnitt eingeführt, um Objekte der Realität und deren Beziehungen in einer klar definierten Form zu beschreiben. Dabei wurden die Bildungsregeln gültiger Ausdrücke behandelt (*Syntax* der Aussagenlogik), die zunächst nichts über den Wahrheitswert dieser Aussagen in Bezug zu einem betrachteten Gegenstandsbereich wiedergeben. Um Verarbeitungsregeln aufstellen zu können, nach denen logische Ausdrücke umgeformt und neue Ausdrücke gebildet werden können, muss als nächstes geklärt werden, welche Bedeutung (*Semantik*) die nach diesen Regeln gebildeten Ausdrücke haben.

Der Zusammenhang zwischen Syntax und Semantik logischer Ausdrücke wird durch die Interpretation der Aussagesymbole und deren Verknüpfungen als Beschreibung von Objekten und deren Beziehungen in der Realität vermittelt (Abb. 7.2). Im Beispiel 7.1 stehen die Symbole a, b, \dots, o für Atome und $\neg(a \wedge b \wedge c \wedge d) \Rightarrow o$ usw. für logische Ausdrücke, während die rechts davon stehenden Sätze die Interpretation dieser logischen Formeln als Beschreibung des Parkplatzes angeben. Diese Interpretation schlägt sich in der Zuordnung der Wahrheitswerte zu den Aussagesymbolen und den Ausdrücken nieder. Wenn der Stellplatz A frei ist, gilt $B(a) = T$, andernfalls $B(a) = F$ usw.

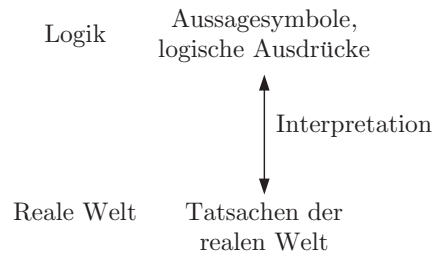


Abb. 7.2: Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Wie Abb. 7.2 zeigt, stellt die Interpretation also einen Zusammenhang zwischen der realen Welt und der „Welt“ der logischen Formeln her. Ohne die Interpretation kann man auf der Ebene der Logik beliebige Aussagesymbole und Ausdrücke nach den Regeln von Definition 7.1 einführen. Welche Aussagesymbole und Ausdrücke wahr bzw. falsch sind, kann erst entschieden werden, wenn man diese logischen Ausdrücke durch eine Interpretation mit der realen Welt verbindet und dabei erkennt, welche von ihnen Tatsachen repräsentieren und welche nicht.

Die Rolle der Interpretation wird im folgenden Beispiel dadurch gezeigt, dass den logischen Ausdrücken aus dem Parkplatzbeispiel eine andere Bedeutung und damit eine andere „reale Welt“ zugewiesen wird.

Beispiel 7.2 Beschreibung einer 2-aus-3-Sicherheitsschaltung

Logische Formeln ohne Interpretation repräsentieren kein Wissen. Erst wenn man jedem Aussagesymbol ein Objekt der realen Welt zuordnet, kann man entscheiden, ob dieses Aussagesymbol „wahr“ oder „falsch“ ist und welche logischen Ausdrücke gelten. Andererseits gibt es zu einer Menge logischer Ausdrücke, die man als „wahr“ definiert, reale „Welten“, die diesen Ausdrücken entsprechen.

Dieser Sachverhalt wird jetzt dadurch veranschaulicht, dass für die im Beispiel 7.1 eingeführten Aussagesymbole eine andere Interpretation eingeführt wird, durch die sie nicht mehr Aussagen über die Belegung eines Parkplatzes, sondern Aussagen über eine 2-aus-3-Logik repräsentieren. Damit wird zu denselben gültigen Ausdrücken eine andere reale Welt definiert.

Bei sicherheitsrelevanten Schaltungen verwendet man eine 2-aus-3-Logik, um Fehler zuverlässig zu erkennen. Diese Logik hat die drei Eingangssignale s_1 , s_2 und s_3 , die unabhängig voneinander ermittelte Messwerte desselben Signals darstellen. Mindestens zwei dieser drei Signale müssen einen kritischen Wert überschreiten, damit die betrachtete Logikschaltung einen Fehler anzeigt.

Zur Beschreibung der Schaltung werden folgende Aussagesymbole eingeführt:

a = „Der Wert des Signals s_1 liegt über dem kritischen Wert.“

b = „Der Wert des Signals s_2 liegt über dem kritischen Wert.“

c = „Der Wert des Signals s_3 liegt über dem kritischen Wert.“

z = „Die Sicherheitsschaltung signalisiert einen Fehler.“

Damit haben die im Beispiel 7.1 eingeführten Ausdrücke hier die folgende Bedeutung:

$a \wedge c \Rightarrow z$ Die Aussagen „Der Wert des Signals s_1 liegt über dem kritischen Wert.“ UND „Der Wert des Signals s_3 liegt über dem kritischen Wert.“ IMPLIZIEREN die Aussage „Die Sicherheitsschaltung signalisiert einen Fehler.“

$\neg a \wedge \neg b \Rightarrow z$ Die Verneinung der Aussage „Der Wert des Signals s_1 liegt über dem kritischen Wert.“ UND die Verneinung der Aussage „Der Wert des Signals s_2 liegt über dem kritischen Wert.“ IMPLIZIEREN die Aussage „Die Sicherheitsschaltung signalisiert einen Fehler.“

Genauso wie beim Parkplatz hat der Ausdruck $a \wedge c \Rightarrow z$ den Wahrheitswert „wahr“ und der Ausdruck $\neg a \wedge \neg b \Rightarrow z$ den Wahrheitswert „falsch“. \square

Dieses Beispiel zeigt zwei wichtige Eigenschaften der logischen Wissensrepräsentation. Erstens erhalten die Aussagen und Ausdrücke erst durch eine Interpretation einen Wahrheitswert. Ohne die Interpretation kann man nicht entscheiden, ob beispielsweise der Ausdruck $a \wedge c \Rightarrow z$ wahr oder falsch ist. Der Leser kann sich leicht Interpretationen überlegen, bei denen dieser Ausdruck – im Unterschied zu den beiden bisher behandelten Beispielen – falsch ist.

Zweitens zeigen dieses und das vorherige Beispiel gemeinsam, dass eine bestimmte Formelmengende in unterschiedlichen Diskursbereichen gelten können. Dann werden zwar dieselben logischen Formeln verwendet, aber das dargestellte Wissen betrifft vollkommen andere Tatsachen der realen Welt.

Modelle logischer Ausdrücke. Um den Begriff der Semantik noch genauer zu definieren, wird im Folgenden der Begriff „Modell“ eines logischen Ausdrucks f eingeführt. Es wird eine Formel f betrachtet, in der die Aussagesymbole der Menge Σ vorkommen, wobei nicht notwendigerweise alle Aussagesymbole tatsächlich in f auftreten müssen. Gesucht wird nach einer Belegung $B : \Sigma \rightarrow \{T, F\}$, für die der Ausdruck f wahr ist: $B(f) = T$. Eine solche Belegung heißt Modell.

Definition 7.2 (Modell)

Eine Belegung $B : \Sigma \rightarrow \{T, F\}$, für die der aus den Aussagesymbolen der Menge Σ gebildete logische Ausdruck f wahr ist, heißt Modell von f .

Da hier wieder der Buchstabe B sowohl zur Kennzeichnung der Belegung der Aussagesymbole als auch für die Belegung der Formel f verwendet wird, sei besonders darauf hingewiesen, dass ein Modell die Belegung aller Aussagesymbole der Menge Σ vorgibt und dass diese Vorgabe so erfolgen soll, dass damit die Formel f „wahr“ ist.

Ein Modell wird aufgeschrieben, indem man die Belegung aller Aussagesymbole notiert. So hat die mit den Aussagesymbolen aus $\Sigma = \{a, b\}$ gebildete Formel $a \vee b$ das Modell

$$M = (B(a) = T, B(b) = T).$$

Zu einem logischen Ausdruck f gehören häufig mehrere Modelle, die man in der Menge $\mathcal{M}(f)$ zusammenfasst. Für die angegebene Formel heißt diese Menge

$$\mathcal{M}(a \vee b) = \{(B(a) = T, B(b) = T), (B(a) = T, B(b) = F), (B(a) = F, B(b) = T)\}.$$

Jedes in dieser Menge enthaltene Tupel beschreibt ein Modell.

Im Zusammenhang mit dem Modellbegriff der Logik sind eine Reihe nicht einfach zu verstehender Sprechweisen geläufig. So sagt man, dass die durch M dargestellte Belegung B ein Modell der Formel f ist, dass M die Formel f erfüllt, dass B eine erfüllende Belegung von f ist oder dass f im Modell M wahr ist. Allen Sprechweisen gemeinsam ist, dass das Modell die Wahrheitswerte für alle Aussagesymbole der verwendeten Menge Σ vorschreibt. An Stelle des Begriffes „Modell“ verwendet man auch die Bezeichnung „Welt“: Man sucht eine Welt, in der die Formel f gilt.

Wahrheitstafelmethode zur Bestimmung von Modellen. Die Aufgabe, zu einer Formel f die Menge $\mathcal{M}(f)$ der Modelle zu bestimmen, kann man mit Hilfe der Wahrheitstafel lösen. Es wird sich zwar herausstellen, dass dies eine sehr aufwändige Methode ist, aber sie erklärt sehr anschaulich den Modellbegriff.

Die Methode ist sehr einfach: Man schreibt alle möglichen Belegungen der Aussagesymbole der betrachteten Menge Σ auf und bestimmt für diese Belegungen den Wahrheitswert des Ausdrucks f . Streicht man dann alle Zeilen der Wahrheitstafel, in denen f „falsch“ ist, so bleiben diejenigen Belegungen der Aussagesymbole übrig, die die Modelle von f sind.

Algorithmus 7.1 Bestimmung der Modelle mit Hilfe der Wahrheitstafel

Gegeben: Menge Σ der Aussagesymbole
Formel f

1. Bestimme alle Belegungen $B : \Sigma \rightarrow \{T, F\}$ und ordne sie in einer Wahrheitstafel an.
2. Bestimme für alle Belegungen den Wahrheitswert von f .
3. Streiche alle Zeilen der Wahrheitstafel, für die $B(f) = F$ gilt.

Ergebnis: Jede verbliebene Zeile der Wahrheitstafel beschreibt ein Modell von f .

Beispiel 7.3 Bestimmung der Modelle für den Parkplatz

Es wird jetzt die Menge $\Sigma = \{a, b, c, z\}$ der im Beispiel 7.1 definierten Aussagesymbole betrachtet und nach den Modellen der Formel

$$a \wedge b \wedge (b \wedge c \Rightarrow z)$$

gesucht. Dafür wird die folgende Wahrheitstafel aufgestellt:

$B(a)$	$B(b)$	$B(c)$	$B(z)$	$B(a \wedge b)$	$B(b \wedge c)$	$B(b \wedge c \Rightarrow z)$	$B(f)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	F	F
T	T	F	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	T	T
T	F	T	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	T	F

Auf der linken Seite der Tabelle stehen die $2^4 = 16$ möglichen Belegungen der Aussagesymbole a, b, c und z . Auf der rechten Seite wird der Wahrheitswert der o. a. Formel f schrittweise gebildet. Eine Belegung der Aussagesymbole ist genau dann ein Modell von f , wenn in der letzten Spalte der Wahrheitswert T steht, was in den drei hervorgehobenen Zeilen der Fall ist. Der betrachtete Ausdruck hat also drei Modelle, die die folgenden Modelle bilden:

$$\mathcal{M}(a \wedge b \wedge (b \wedge c \Rightarrow z)) = \{(B(a) = T, B(b) = T, B(c) = T, B(z) = T),$$

$$\begin{aligned} & (B(a) = \text{T}, B(b) = \text{T}, B(c) = \text{F}, B(z) = \text{T}), \\ & (B(a) = \text{T}, B(b) = \text{T}, B(c) = \text{F}, B(z) = \text{F}). \end{aligned}$$

Mit der im Beispiel 7.1 für den Parkplatz eingeführten Interpretation beschreibt das erste Modell die erwartete „Welt“, in der die drei Stellplätze A, B und C frei sind und (deshalb) auch die Aussage gilt, dass zwei Stellplätze frei sind. Man sieht jedoch, dass man genauer „mindestens zwei Stellplätze sind frei“ sagen müsste, wenn man, wie in der betrachteten Formel angegeben, die Aussage z aus b und c impliziert.

Das zweite Modell besagt, dass die Stellplätze A und B frei und der Stellplatz C belegt ist, aber dennoch die Aussage z richtig ist. Dass dieses Modell gilt, ist eine Folge der Definition der Implikation, die zulässt, dass die linke Seite $b \wedge c$ der Implikation falsch ist, dennoch aber die rechte Seite z wahr ist.

Das dritte Modell, bei dem ebenfalls die Stellplätze A und B frei sind, aber dennoch die Aussage z , dass zwei Stellplätze frei sind, den Wahrheitswert „falsch“ hat, zeigt, dass die angegebene Formel nicht alles das ausdrückt, was eigentlich ausgesagt werden soll. Man muss in der Formel genauer aufschreiben, wann die Aussage z gilt, nämlich

$$b \wedge c \vee a \wedge b \vee a \wedge c \Rightarrow z$$

oder sogar

$$b \wedge c \vee a \wedge b \vee a \wedge c \Leftrightarrow z.$$

Ersetzt man die Implikation $b \wedge c \Rightarrow z$ in der Formel f durch einen dieser Ausdrücke, dann entfällt das dritte Modell, was inhaltlich sinnvoll ist. Die Modelle von f stimmen dann mit den „Welten“ überein, die die Formel f darstellen soll.

Diskussion. Jedes Modell erklärt die Bedeutung der für den Parkplatz aufgeschriebenen Formeln. Erst durch die Ermittlung der Modelle wurde für das Beispiel offensichtlich, dass die Formeln mit der für den Parkplatz eingeführten Interpretation nicht genau das ausgesagt haben, was sie aussagen sollten und dementsprechend eine Erweiterung notwendig war.

Die Aussagesymbole wurden zwar so gewählt, dass man durch sie an ihre Bedeutung für den Parkplatz erinnert wird. Aber hier trügt der Schein. Es ändert sich überhaupt nichts an der Bedeutung (Modell) der Formel, wenn man sie mit vollkommen anderen Symbolen aufschreibt, beispielsweise so:

$$pp01 \wedge aQ16 \wedge (aQ16 \wedge Pique8 \Rightarrow August).$$

Das Modell bleibt dasselbe (mit veränderten Aussagesymbolen) und deshalb auch die Bedeutung der Formel. Die Logikverarbeitung hält sich niemals an die Namen der Aussagen. \square

Der Algorithmus 7.1 hat die Komplexität $O(2^n)$, wobei n die Anzahl der Aussagesymbole bezeichnet. Die exponentielle Komplexität entsteht aus dem exponentiellen Zusammenhang zwischen der Anzahl von unterschiedlichen Belegungen B und der Anzahl n von Aussagesymbolen.

Der Algorithmus verdeutlicht sehr gut, was Modelle logischer Ausdrücke aussagen, aber er ist auf Grund seiner Komplexität nur für Probleme mit sehr wenigen Aussagesymbolen einsetzbar. Allerdings kann man geschickter vorgehen, als die gesamte Wahrheitstafel aufzustellen. Im Beispiel 7.3 beschränkt der Ausdruck $a \wedge b$ aus dem linken Teil der betrachteten Formel die Wahrheitstafel auf die ersten vier Zeilen. Man kann die Wahrheitstafel deshalb im ersten Schritt bereits auf diesen kleinen Teil der angegebenen Tabelle verkürzen.

Klassifikation logischer Ausdrücke. Entsprechend der Anzahl der Modelle lassen sich logische Formeln in folgende Klassen einteilen (Abb. 7.3):

- Ein Ausdruck f heißt *erfüllbar*, wenn er mindestens ein Modell besitzt ($\mathcal{M}(f) \neq \emptyset$).
- Ein Ausdruck heißt *falsifizierbar*, wenn es eine Belegung gibt, für die der Ausdruck falsch ist ($\mathcal{M}(\neg f) \neq \emptyset$).
- Ein Ausdruck heißt *allgemeingültig* oder wahr, wenn er bei allen Belegungen wahr ist ($\mathcal{M}(\neg f) = \emptyset$). Allgemeingültige Ausdrücke werden als *Tautologien* bezeichnet.
- Ein Ausdruck f heißt *unerfüllbar* oder widersprüchlich, wenn er für keine Belegung wahr ist ($\mathcal{M}(f) = \emptyset$). Derartige Ausdrücke werden *Kontradiktion* oder *Widerspruch* genannt.

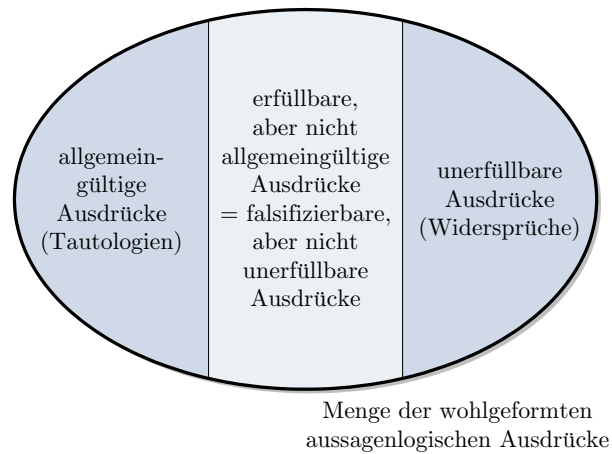


Abb. 7.3: Klassifikation logischer Ausdrücke

Dabei gilt:

- || Der Ausdruck f ist genau dann allgemeingültig, wenn $\neg f$ unerfüllbar ist.
 || Der Ausdruck f ist genau dann erfüllbar, wenn $\neg f$ falsifizierbar ist.

Die Menge aller aussagenlogischen Ausdrücke lässt sich entsprechend Abb. 7.3 in drei disjunkte Mengen einteilen, wobei die Menge der erfüllbaren, aber nicht allgemeingültigen Ausdrücke auch als die Menge der falsifizierbaren, aber nicht unerfüllbaren Ausdrücke bezeichnet werden kann. Alle erfüllbaren Ausdrücke gehören in die linken beiden Teilmengen der Abbildung, alle falsifizierbaren Ausdrücke in die rechten beiden Teilmengen.

Beispiele für eine Tautologie und einen Widerspruch sind $(p \vee \neg p)$ bzw. $(p \wedge \neg p)$, wie die folgende Wahrheitstafel zeigt:

$B(p)$	$B(p \vee \neg p)$	$B(p \wedge \neg p)$	(7.9)
T	T	F	
F	T	F	

Tautologien und Kontradiktionen sagen nichts über den sich hinter den Aussagesymbolen verborgenden Gegenstandsbereich aus, denn sie sind für alle bzw. keine Belegung wahr. Die für die Wissensverarbeitung interessante Klasse logischer Ausdrücke ist die Menge der erfüllbaren, nicht allgemeingültigen Formeln, die aus der Menge aller Belegungen eine Teilmenge auswählen, für die sie wahr sind (mittlere Menge in Abb 7.3).

Die Einordnung eines logischen Ausdrucks f in eine der drei Gruppen erfordert die Lösung des Erfüllbarkeitsproblems für f und $\neg f$:

Erfüllbarkeitsproblem: Für einen Ausdruck f ist zu entscheiden, ob es eine Belegung B gibt, für die f wahr ist.

Dieses Problem kann mit der Wahrscheinlichkeitstafelmethode gelöst werden. Es gehört zur Klasse der NP-vollständigen Probleme.

Aufgabe 7.1 Klassifikation aussagenlogischer Ausdrücke

Prüfen Sie, welche der folgenden Aussagen Tautologien sind:

1. $a \wedge (\neg a)$
2. $(a \wedge b) \Rightarrow (a \wedge (b \vee (\neg a)))$
3. $(a \Rightarrow (b \vee c)) \vee (c \Rightarrow (a \vee b))$.

Geben Sie für die folgenden Formeln an, ob sie allgemeingültig, erfüllbar, falsifizierbar oder unerfüllbar sind:

4. $p \Rightarrow p$
5. $p \wedge q \Rightarrow q$
6. $a \vee b \wedge \neg a$
7. $(\neg a \vee b \vee c) \wedge (a \vee \neg b \vee c) \wedge (a \vee b \vee \neg c)$. \square

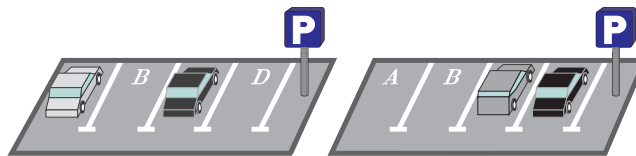


Abb. 7.4: Zwei Belegungen des Parkplatzes

Aufgabe 7.2 Parkplatzmodelle

Geben Sie eine Formel f an, deren Modellmenge $\mathcal{M}(f)$ genau zwei Modelle enthält. Die Interpretation der Modelle soll die beiden in Abb. 7.4 gezeigten „Belegungen“ des Parkplatzes darstellen. \square