

3

Analyse von Matrizen anhand ihrer Strukturgraphen

3.1 Strukturmatrizen

Wichtige Eigenschaften von Matrizen haben strukturelle Gründe, d. h., diese Eigenschaften hängen weitgehend davon ab, welche Elemente der betrachteten Matrix von null verschieden sind und welche Elemente beliebige Werte annehmen können. Um diesen Zusammenhang zu zeigen, werden Strukturmatrizen betrachtet. Dies sind Matrizen, deren Elemente entweder null sind oder einen beliebigen Wert haben und deshalb durch Sterne dargestellt sind.

Von einer reellwertigen Matrix A kommt man zur zugehörigen Strukturmatrix $[A]$, wenn man alle von null verschiedenen Elemente durch einen Stern ersetzt:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -0,3 & 0 & 10 \\ 2,8 & 0 & -100 \end{pmatrix} \rightarrow [A] = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Damit geht man gleichzeitig von einer einzelnen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ zur Klasse aller Matrizen über, die dieselbe Struktur haben. Bezeichnet man mit S_A eine Strukturmatrix, so sind alle Matrizen A strukturell äquivalent, für die

$$[A] = S_A$$

gilt. Die Menge dieser Matrizen wird durch

$$\mathcal{S}(S_A) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times m} \mid [A] = S_A\}$$

dargestellt und man schreibt anstelle von $A \in \mathcal{S}(S_A)$ kürzer

$$A \in S_A.$$

A heißt dann auch eine *zulässige numerische Realisierung* von S_A . Zulässige numerische Realisierungen derselben Strukturmatrix heißen *strukturell äquivalent*.

Bei der Interpretation der $*$ -Elemente in einer Strukturmatrix ist wichtig, dass alle derartigen Elemente unabhängig voneinander sind, also die Veränderung eines dieser Elemente keine Veränderung anderer Elemente nach sich zieht. Gegenseitige Abhängigkeiten von Elementen einer Matrix gehen beim Übergang zur Strukturmatrix also verloren. In einer zulässigen numerischen Realisierung können an der Stelle von $*$ -Elementen auch Nullen stehen.

3.2 Struktureller Rang von Matrizen

Der Rang einer Matrix gibt bekanntlich die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten an. Ob Zeilen oder Spalten linear abhängig sind oder nicht, hängt häufig nicht von dem genauen Wert der Matrixelemente ab, sondern von den Positionen, an denen in der Matrix die von null verschiedenen Elemente stehen. Betrachtet man beispielsweise die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix},$$

die beide nur zwei von null verschiedene Elemente haben, so ist aufgrund der Nullspalte der Matrix A sofort zu erkennen, dass die Matrix A für keine Werte der Elemente a_{11} und a_{21} vollen Rang haben kann, während bei der zweiten Matrix ein Rangabfall nur dann eintritt, wenn eines der Elemente b_{11} und b_{22} (bzw. beide) gleich null sind. Die Positionen von b_{11} und b_{22} sind dafür verantwortlich, dass die Matrix B für „fast alle“ Werte dieser beiden Elemente regulär ist.

Andererseits zeigt dieses Beispiel, dass die Position der nicht auf null fixierten Elemente b_{11} und b_{22} allein noch nicht dafür ausreicht, dass B regulär ist. Aufgrund der Struktur

$$[B] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

kann man nicht entscheiden, ob B regulär oder singular ist. Man kann also den Begriff Rang einer Matrix nicht direkt auf Strukturmatrizen übertragen.

Deshalb definiert man eine neue Eigenschaft, die *struktureller Rang* (s -Rang) heißt und die sich auf Strukturmatrizen bezieht. Diese Definition verwendet den Begriff der *unabhängigen Elementenunabhängige Elemente* einer Strukturmatrix – das sind $*$ -Elemente, die in unterschiedlichen Zeilen und unterschiedlichen Spalten stehen.

Definition 3.1 (Struktureller Rang)

Der *strukturelle Rang* (s -Rang) einer Strukturmatrix S ist die maximale Anzahl unabhängiger Elemente von S .

Die Formulierung „maximale Anzahl unabhängiger Elemente“ bezieht sich auf die Tatsache, dass es häufig mehrere Möglichkeiten gibt, unabhängige Elemente aus S auszuwählen. Bei der

Bestimmung des s-Rangs muss man dies besonders geschickt machen, so dass man auf eine Menge mit maximaler Anzahl derartiger Elemente kommt.

Wenn der strukturelle Rang einer Strukturmatrix S gleich n ist, so haben fast alle zulässigen numerischen Realisierungen $A \in S$ den Rang n . Wenn man also für eine Matrix A den s-Rang der zugehörigen Strukturmatrix $[A]$ bildet, so kennt man eine obere Schranke für den (numerischen) Rang von A :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Rang } A &\leq \text{s-Rang } [A] \\ \max_{\tilde{A} \in [A]} \text{Rang } \tilde{A} &= \text{s-Rang } [A]. \end{aligned}} \quad (3.1)$$

Beispiel 3.1 Bestimmung des strukturellen Rangs

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

führt auf die Strukturmatrix

$$[A] = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Beginnt man bei der Auswahl der unabhängigen Elemente in der oberen rechten Ecke der Matrix, so kann man nur zwei derartigen Elemente finden:

$$\begin{pmatrix} * & 0 & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Der s-Rang ist allerdings größer als zwei, weil man die Auswahl geschickter treffen und dabei drei unabhängige Elemente finden kann:

$$\text{s-Rang} \begin{pmatrix} \bullet & 0 & * \\ 0 & \bullet & 0 \\ 0 & 0 & \bullet \end{pmatrix} = 3.$$

Das Ergebnis zeigt, dass die Matrix A für die meisten Werte ihrer von null verschiedenen Elemente den Rang drei besitzt. Weil für die Determinante die Beziehung

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}$$

gilt, ist offensichtlich, dass der Rang nur dann kleiner als drei ist, wenn eines der Hauptdiagonalelemente verschwindet, was den Zusammenhang (10.4) zwischen numerischem und strukturellem Rang illustriert. \square

3.3 Zerlegung von Matrizen

Quadratische Matrizen heißen *reduzibel*, wenn sie durch Vertauschen gleicher Zeilen und Spalten in eine Blockdiagonalform gebracht werden können; anderenfalls heißen sie *irreduzibel*. Das Vertauschen der Zeilen und Spalten kann durch die Multiplikation mit einer Permutationsmatrix P dargestellt werden. Permutationsmatrizen haben in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins, sonst Nullen und für sie gilt $P^{-1} = P^T$.

Definition 3.2 (Reduzible Matrix)

Eine Matrix A heißt *reduzibel* (*reduzierbar*, *zerlegbar*), wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, mit der

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{11} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

gilt, wobei A_{11} und A_{22} quadratische Matrizen sind. Andernfalls heißt die Matrix *irreduzibel* (*nicht zerlegbar*).

Die angegebene Zerlegung kann man möglicherweise auch auf die Teilmatrizen A_{11} und A_{22} anwenden, so dass schrittweise eine Zerlegung entsteht, die die Matrix A in eine Blockdiagonalmatrix mit q Diagonalblöcken überführt. Meist ist man daran interessiert, diese feinste Zerlegung zu finden.

Ob eine Matrix A *reduzibel* ist, kann man anhand ihrer Strukturmatrix $[A]$ erkennen, also ohne Bezug zu den genauen Werten der Elemente von A . Man interpretiert die Strukturmatrix $[A]$ als Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen $\mathcal{G}(A)$, indem man die $*$ -Elemente von $[A]$ durch Einsen ersetzt. Die dabei entstehende Matrix soll wieder mit A bezeichnet werden, weil es bei der Überprüfung der Zerlegbarkeit der ursprünglich betrachteten Matrix nicht auf die Werte der von null verschiedenen Elemente ankommt.

Der direkte Zusammenhang zwischen Eigenschaften der Adjazenzmatrix und des Graphen wird durch die folgenden Aussagen zusammengefasst:

- Die Matrix A ist genau dann *irreduzibel*, wenn der Graph $\mathcal{G}(A)$ stark zusammenhängend ist. Entsprechend Definition 2.1 heißt dann auch der Graph *irreduzibel*.
- Zerlegt man die Knotenmenge entsprechend Gl. (2.4) in Mengen \mathcal{V}_i stark zusammenhängender Knoten, so erkennt man anhand der Teilmengen, ob und in welche Teilmatrizen die Matrix A zerfällt. Die Diagonalblöcke A_{ii} haben dieselbe Struktur wie die Teilgraphen mit den Knotenmengen \mathcal{V}_i .

Wenn die Matrix \tilde{R} aus Gl. (2.3) keine verschwindenden Elemente besitzt, ist die Matrix A *irreduzibel*. Andernfalls erkennt man aus den Teilmengen \mathcal{V}_i , ($i = 1, 2, \dots, q$), welche Zeilen und Spalten der Matrix A zusammengehören, so dass die gesuchte Blockdreiecksmatrix entsteht. Das heißt, dass man aus der Zerlegung der Knotenmenge die in Gl. (3.2) vorkommende Permutationsmatrix P ablesen kann.

Die Graphen $\mathcal{G}(A) = (\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ und $\mathcal{G}(PAP^T) = (\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ der Matrix A und der permutierten Matrix sind isomorph, wobei die Abbildung $P : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ durch die Permutationsmatrix P festgelegt ist. Für die Strukturmatrix gilt $[PAP^T] = P[A]P^T$, wenn man bei der Matrixmultiplikation die $*$ -Elemente wie Einsen behandelt.

Beispiel 3.2 Zerlegung einer Matrix

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{54} & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{pmatrix}$$

führt auf eine Strukturmatrix, zu der der in Abb. 2.1 gezeigte Graph und folglich die in Gl. (2.2) angegebene Adjazenzmatrix passen. Die nach Gl. (2.3) gebildete Matrix heißt

$$\tilde{R} = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 4 & 7 & 5 & 4 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right).$$

Die Blockdreiecksstruktur dieser Matrix zeigt, dass bei diesem Beispiel die Knoten – und folglich die Zeilen und Spalten der Matrix – gar nicht umnummeriert werden müssen, um die Zerlegung durchzuführen:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a_{53} & 0 & 0 & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & 0 \end{array} \right)$$

Die Matrix A enthält drei Diagonalblöcke und hat nur unterhalb dieser Blöcke von null verschiedene Einträge. Sie ist also reduzierbar. Zu den Hauptdiagonalblöcken gehören diejenigen Zeilen und Spalten, deren Knoten stark zusammenhängend sind (vgl. die zerlegte Matrix mit dem Graphen in Abb. 2.2). \square

Literaturhinweise

- [1] Bernstein, D. S.: *Matrix Mathematics*, Princeton Univ. Press, Princeton 2005.
- [2] Duff, I. S.: A survey of sparse matrix research, *Proceedings of the IEEE* **65** (1977), 500-535.
(erste Darstellung einer strukturellen Analyse spärlich besetzter Matrizen; mit ausführlicher Bibliografie).
- [3] Voigt, C.; Adamy, J.: *Formelsammlung der Matrizenrechnung*, Oldenbourg-Verlag, München 2007.

Aufgabe

Aufgabe 3.1 Struktureller Rang und numerischer Rang

Bestimmen Sie den strukturellen Rang der Strukturmatrix

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbf{S}$ an, deren Rang gleich dem s-Rang von \mathbf{S} ist. Gibt es Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbf{S}$, die in allen *-Positionen nicht verschwindende Elemente besitzen und deren Rang kleiner als der s-Rang von \mathbf{S} ist? Sind die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbf{S}$ reduzibel? □